Bilingual Montessori School of Lund

År: 2023

Region: Lund, Skåne

Nation: Sverige

Skola: Bilingual Montessori School of Lund (BMSL)

Klass: 8B

Ellipser

NMCC - sigma 8

INNEHÅLL

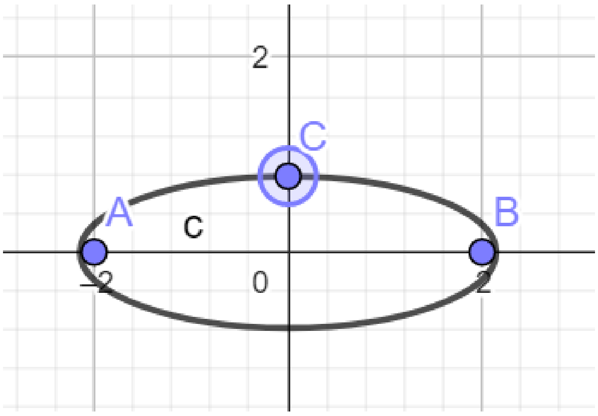
Introduktion:

En ellips är en geometrisk cirkel-liknande form vilket kan bli skapad på olika sätt. Vi ska visa några olika sätt som man kan skapa en ellips på och visa med hjälp av matematiken varför de skapar samma form. Vår klass har samarbetat genom svårigheter och kommit fram med intressanta resultat om ellipser.

Samarbete och Utmaningar:

Det allra första vi gjorde var att som klass hjärnstorma om vad vi redan visste om Ellipser. Det visade sig att vi hade delade åsikter om vad en ellips är, t.ex trodde vi att en oval är en ellips men så måste inte fallet vara. En ellips är ett specialfall av en oval.

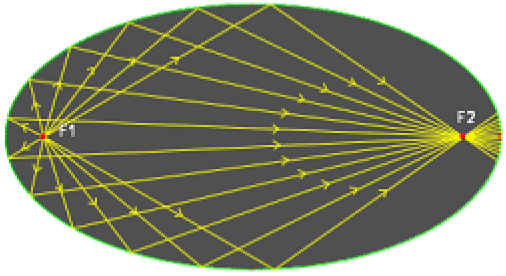
Vi delade in oss i fem grupper om fyra där varje grupp fick påbörja en egen undersökning om ellipser för att få en delad och korrekt uppfattning om vad ellipser är. Alla grupperna skrev sen i samma dokument så att informationen skulle vara samlad. Detta kom vi fram till om ellipsens egenskaper:



Denna ellipsen är ritad med Geogebra och vi har valt att använda detta programmet för att det tydligt visar ellipsens olika egenskaper. Punkterna A och B är ellipsens brännpunkter och det sammanlagda avståndet från dem, till ellipsens kant är alltid konstant. Brännpunkterna kan också kallas foci. På denna bilden ser vi också symmetriaxlarna (linjerna som skär ellipsens mittpunkt på x och y axlarna). Dessa finns i alla ellipser och delar in ellipsen i fyra kongruenta (lika) delar. De skär varandra vinkelrätt och kallas storaxeln och lillaxeln.

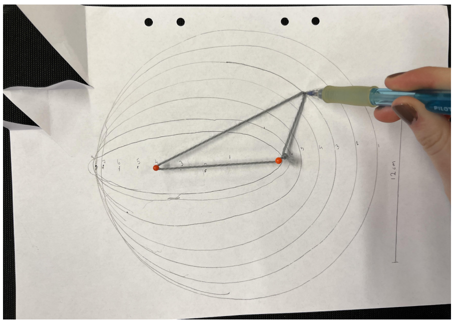
En ellips har också ett värde som kallas för excentricitet. Det kan vara mellan 0 och 1 beroende på hur nära en cirkel den är. Om excentriciteten är 0 så är ellipsen en cirkel och om den är 1 så är den en parabol. Man kan säga att excentriciteten är hur utdragen ellipsen är på en skala mellan 0 och 1.

Ellipser kan vara mycket användbara inom bland annat optik, eftersom om en ljusstråle går genom den ena brännpunkten, så kommer ellipsen alltid reflektera den till den andra brännpunkten oavsett vinkeln.

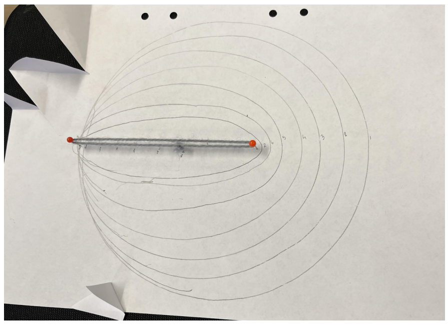


Så här valde de olika grupperna att samarbeta och lösa problem:

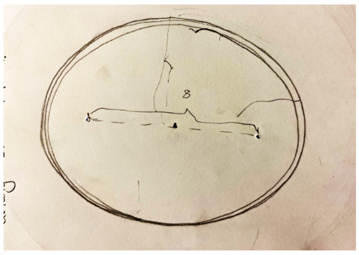
Grupp 1: Efter vår undersökning valde vi trådmetoden för att rita en ellips. Vi tyckte den var mest intressant och enkel att utföra i klassrummet. Vi fick tag i 2 nålar och ett snöre, sedan satte vi fast nålarna på en platt yta och band ihop snöret runt nålarna. Vi satte en penna innanför snöret och drog den ut och runt så att en ellips bildades.



Vi hade svårt med att förstå att ellipsens form påverkas av hur nära nålarna är till varandra och vi började med att sätta dem ytterst nära så att ellipsen nästan blev helt cirkelformad. Efter en del tänkande och forskning förstod vi att nålarna är ellipsens brännpunkter. Ju längre ifrån varandra vi flyttar nålarna (brännpunkter) desto mer avlång blir ellipsen och vårt problem var löst.

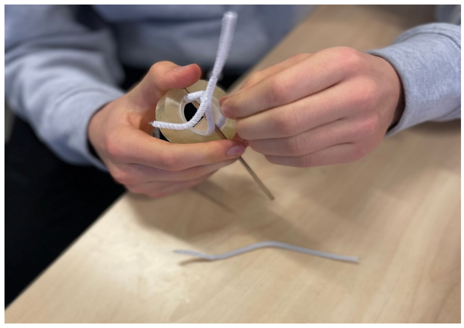


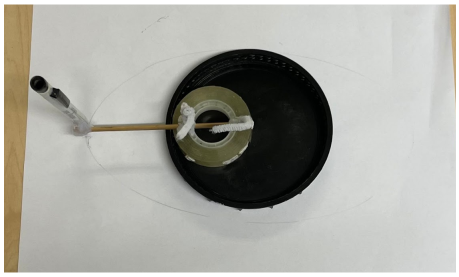
Grupp 2: När vi tagit reda på vad en ellips är och dess egenskaper övergick vi till att ta reda på hur man kan skapa en ellips. Vi hittade flera olika metoder men vi fastnade speciellt för en, trådmetoden. Se grupp 1 för hur vi gjorde. Dock hade vi problem med att få nålarna att sitta stabilt och inte ramla.



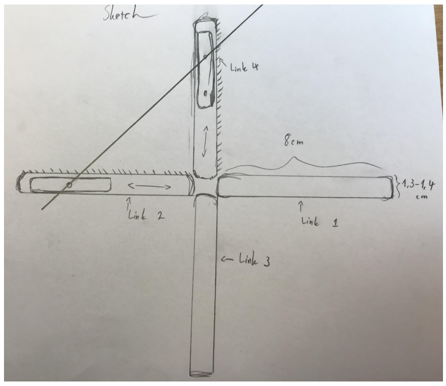
Vi löste detta problemet genom att hålla ordentligt i nålarna medan en av oss ritade och så använde vi ett av våra datorfodral, för de är stoppade med skumgummi och där kunde nålarna sitta bra och stabilt. Tillsammans löste vi vårt problem och kunde komma fram till att trådmetoden fungerar.

Grupp 3: Vi såg att grupp 4 gjorde en modell av Archimedes Trammel. Vi blev väldigt inspirerade och bestämde oss för att också göra en enklare variant av den som gick att tillverka i klassrummet. Vi hittade Tusi-paret som utgår från en cirkel med en mindre cirkel, med hälften av diametern av den stora, som rullar längs den större cirkelns kant inuti. Vi bestämde oss för att använda en penna, ett grillspett av trä, två piprensare, ett lock och en tejprulle. Här hade vi stora problem att hitta en yttre cirkel som hade ganska exakt dubbelt så stor diameter som vår inre cirkel, tejprullen, men tillslut fick vi ett lock från skolans kök som var perfekt. Vi satte ihop delarna med hjälp av smältlim från en limpistol.

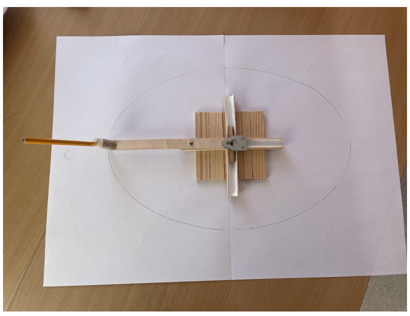




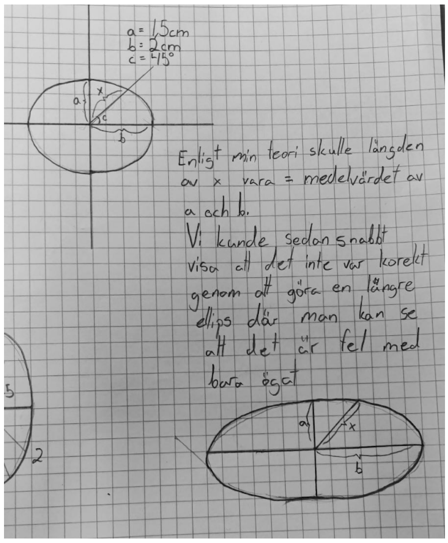
När vi hade satt ihop alla delarna och testade den insåg vi att den var ytterst svår att använda. Pinnan vred sig så att pennan var ostabil. Vi satt häftmassa på den och det fungerade bra. Sedan märkte vi att inre cirkeln gled lätt iväg när den inte skulle det. Efter fler försök testade vi att sätta häftmassa runt den inre cirkelns kant för att höja friktionen, eftersom häftmassan för en kort tid fastnar i den yttre cirkelns vägg. Vi testade och det visade sig att detta var problemets lösning och efter lite övning med maskinen fungerar den jättebra att rita ellipser med.



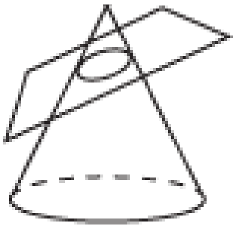
Grupp 4: Vi kom på att vi hade sett ett klipp på Tiktok om en enkel maskin som kan rita ellipser. Vi visste att vi skulle ha med ett intressant objekt i vår presentation så vi började genast googla om den och ta reda på hur den fungerar. Det visade sig att den heter "Trammel of Archimedes" och fungerar så att när flera punkter rör sig på raka linjer i synk bildas en ellips.



När vi förstått grunderna, hur den fungerar och olika delar i Archimedes Trammel samspelar började vi skissa. Vi bestämde att det skulle vara lättast att göra den av trä plaströr och metall. Vi visste inte riktigt hur vi skulle göra proportionerna mellan de olika delarna och vår första försök skapade ingen tydlig ellips. Tillslut kom vi fram till en bra skiss som hade alla förutsättningar för att göra en tydlig ellips. Vi tyckte att detta var ett bra och effektivt samarbete som ledde till ett positivt och lyckat resultat.



Grupp 5: Vi gick igenom många olika metoder för hur man kan skapa en ellips till exempel den i bilden. Vi bevisade matematiskt att trådmetoden som flera andra grupper har testat fungerar.



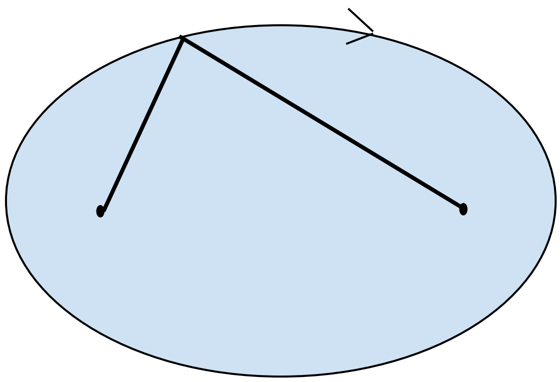
Vi pratade också om metoden där man skära en kon och på så sätt få en ellips, se bilden snett till höger. Det blir en elliptisk form oavsett hur man skär konen så länge skärningen inte går igenom konens basyta. Vi har testat denna metod med hjälp av en genomskinlig kon och ett papper. Sedan klippte vi klippt ut ett ellipsformat hål i pappret, vilket vi trädde på konen. Med en speciell lutning på pappret märkte vi att formen passade perfekt på konen.

Vi kom också att tänka på om man kan skriva en ekvation till en ellips och började genast undersöka det. Vi kom fram till att det nog var möjligt så vi försökte lista ut vilka mått vi skulle använda. Detta var svårt för precis som andra geometriska former kan ellipser ha många olika mått. Men vi löste utmaningen vi ställts inför genom att tänka igenom vilka mått vi har och sen vilka mått som var nödvändiga och vilka vi kunde strunta i just till den uträkningen.

Resultat:

Efter att ha gått igenom alla gruppernas undersökningar bestämde vi oss för att visa varför 3 av dessa metoder skapar samma geometriska form, en ellips. Vi börjar med den enklaste metoden och gick sakta till svårare.

Trådmetoden:

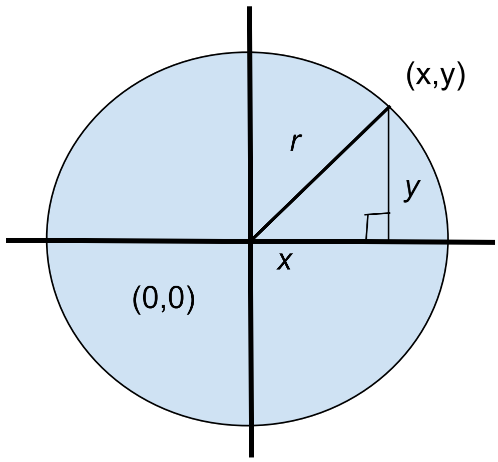


Som man ser ovanför i texten, så har 2 grupper använt denna metod och vi kommer att använda denna metod som en definition för en ellips när vi bevisar de andra metoderna. Vår definition är “*En form är en ellips om* *man kan placera två brännpunkter, så att man därefter kan välja vilken punkt som helst på kanten av formen, så att summan av längden från den ena brännpunkten till punkten på kanten, och längden från den andra brännpunkten till punkten på kanten, alltid är samma."*

Trådmetoden och ellipsens ekvation:

Med digitala verktyg som till exempel Geogebra så kan man rita cirklar med hjälp av cirkelns ekvation. För att en punkt med koordinaterna (*x,y*) ska ligga på kanten av en cirkel som har radien *r* och mittpunkt i origo så måste följande ekvationen stämma:

$x^2 + y^2 = r^2$. Vi kan få den här formeln genom att använda Pythagoras sats. Så om vi vill rita en cirkel med radie 5 så kan vi skriva in $x^2 + y^2 = 5^2$.

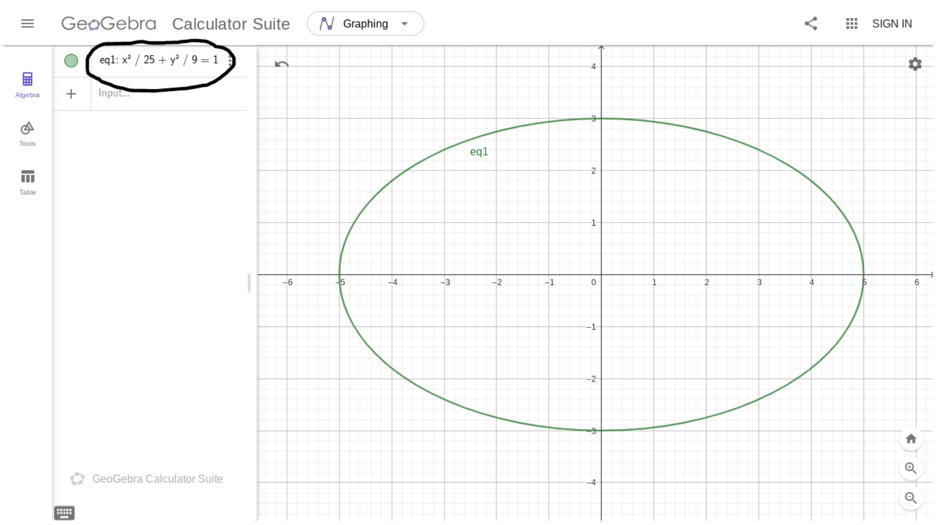


Kan vi skriva en liknande ekvation för en ellips?

Genom att använda vår kunskap från trådmetoden och vår definition kan vi visa att ellipsens ekvation är $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, där a är längden av storaxeln,och b är längden av lillaxeln och mittpunkten sitter i origo.

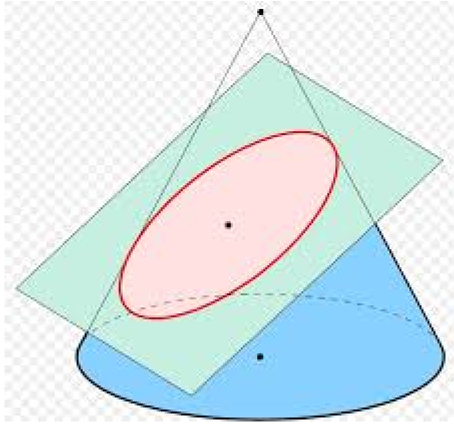
Appendix 1 visar hur vi kom fram till formeln.

Denna formel är ellipsens ekvation. Detta betyder att punkten (*x,y*) är på kanten av en ellips med den storaxeln *a* och den lillaxeln *b*. Om vi t.ex vill rita en ellips med storaxeln *3* och den lillaxeln *5,* så kan vi skriva in $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ i Geogebra.



Om $a = b$ så blir formeln $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ eller

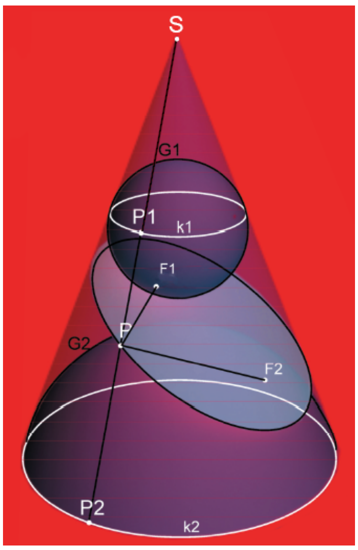
$x^2 + y^2 = a^2$ som är samma som cirkelns ekvation. Detta är rimligt eftersom en cirkel är en ellips där båda axlarna är lika långa.



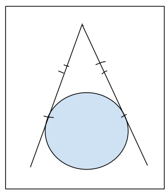
Skära en kon:

Man kan skapa en ellips genom att skära ett tvådimensionellt plan genom en kon med en vinkel. Snitt ytan på konen kommer då att ha formen av en ellips. Detta kallas för en konisk sektion.

Vi ska nu visa varför en ellips kan skapas på detta sätt genom att använda definitionen som vi skapade från trådmetoden.

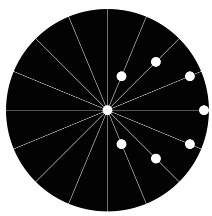


Vi börjar med att placera två klot i konen (vi kallar dem för G1 och G2), G1 är över planet som skär konen och G2 är under. G1 tangerar planet i punkten F1 och G2 tangerar planet i punkten F2 (tangera betyder att ett plan eller rät linje rör en kurva eller kurvad yta i endast en punkt). G1 rör konen i en cirkel som vi kallar för k1 och G2 rör vid konen i en cirkel som vi kallar k2. Punkten S är spetsen på konen och punkten P är en godtycklig punkt på snittytans kant. Punkten P1 är en punkt som ligger på skärningspunkten mellan cirkeln k1 och linjen SP och punkten P2 är en punkt som ligger på skärningspunkten mellan cirkeln k2 och linjen SP.

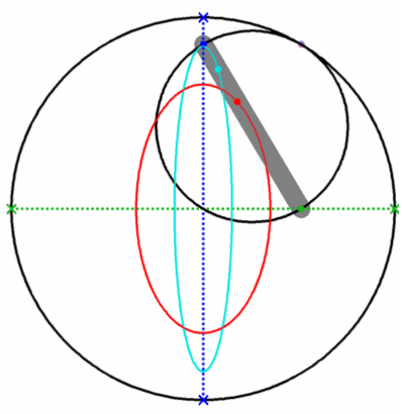


Om två sträckor som tangerar ytan av ett klot i ena änden möts i en punkt i andra änden så kommer sträckorna att vara lika långa. Detta betyder att sträckan P till P2 är lika lång som sträckan P till F2 och att sträckan P till P1 är lika lång som sträckan P till F1. Detta betyder att summan av sträckorna P till F1 och P till F2 är lika lång som sträckan P1 till P2. Sträckan P1 till P2 är lika lång oavsett var punkten P ligger på snittytans kant, detta betyder att summan av sträckorna P till F1 och P till F2 är lika lång oavsett var punkten P ligger på snittytans kant. Enligt vår definition av en ellips betyder detta att snittytan är en ellips med punkterna F1 och F2 som brännpunkter.

Tusi-par:



Ett annat sätt att skapa ellipser är genom att använda ett tusi-par. Ett tusi-par består av en större cirkel och en mindre cirkel med hälften så stor radie som rullar längs den inre kanten av den större cirkeln. Under rotationen kommer alltid en och samma punkt av cirkeln gå upp och ner för alltid. I bilden bredvid de gröna och blåa prickar markera de gröna och blåa linjerna som blir ellipsens axlar. Linjen mellan punkterna är diametern av den lilla cirkel. Ta man en punkt på diametern eller längre än diametern, så kommer änden av denna linjen skapa en ellips. Ju längre denna linjen är, ju större blir ellipsen. Bilden bredvid visar detta tydligt och den visar också hur ett tusi-par och Archimedes trammel utgår från samma princip för att skapa ellipser.



Slutsats:

Slutsatsen vi drog efter våran undersökning är att en ellips är en tvådimensionell form som både kan bli skapad och bevisad med hjälp av brännpunkter. Summan av distansen från brännpunkterna till vilken punkt som helst i ellipsen är alltid konstant. En ellips kan skapas när en kon skärs med ett vinklat plan, genom trådmetoden, med Archimedes trammel, med ellipsens ekvation och med ett tusi-par. Till skillnad från vad vi trodde från början så är inte en oval och en ellips samma sak. Vi har också spenderat mycket tid och letat efter sätt att skapa en ellips med vissa bättre än andra vilket har expanderat våra kunskaper om ellipser inte bara på ett matematiskt sätt men också inom natur och kultur.

Referenser

https://youtu.be/MUaWB3XTjxk Rita en ellips

https://sv.wikipedia.org/wiki/Ellips_(matematik) Ellips (matematik) - Wikipedia

https://www.synonyma.se/ellips/ Ellips synonymer

http://www2.math.uu.se/~rikardo/baskursen/sammanfattningar/6.pdf Föreläsning om kägelsnitt

https://docplayer.se/105225121-Om-ellipsen-och-hyperbelns-optiska-egenskaper-och-lite-biljard.html Om ellipsen och hyperbelns optiska egenskaper. Och lite biljard

https://www.byggahus.se/forum/threads/tillverka-en-oval-skiva.139899/ Tillverka en oval skiva

https://americanhistory.si.edu/collections/search/object/nmah_694104 Elliptic trammel

https://en.wikipedia.org/wiki/Trammel_of_Archimedes Trammel of Archimedes - Wikipedia

https://www.youtube.com/watch?v=dpt6GucTn58 Trammel of Archimedes - youtube

https://www.youtube.com/watch?v=pQa_tWZmlGs Why slicing a cone gives an ellipse - youtube

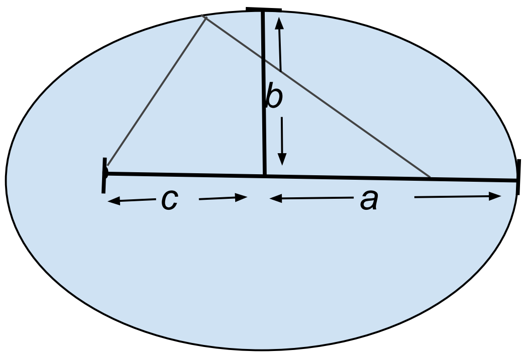
https://www.youtube.com/watch?v=7Fn-26Jmi5E Secrets of the Nothing Grinder - youtube

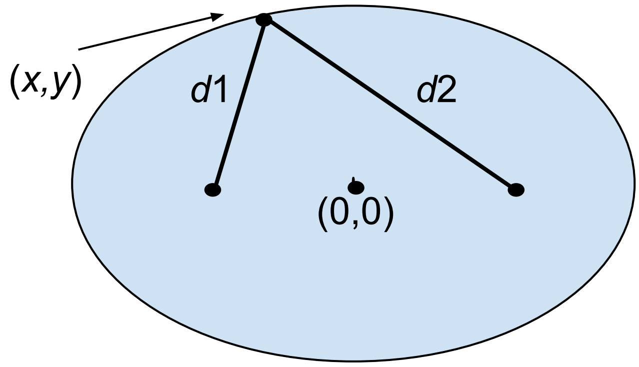
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tusi_couple_vs_Paper_strip_plus_Ellipses_vertical.gif Tusi couple vs Paper strip plus Ellipses vertical - wikipedia

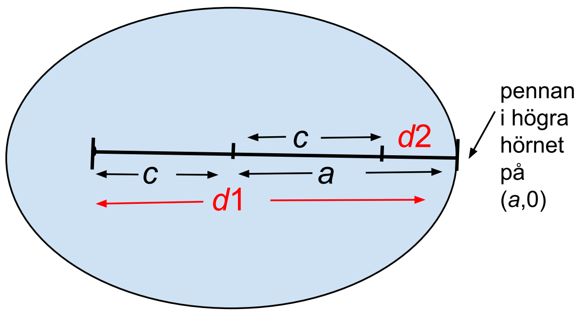
https://blender.stackexchange.com/questions/165190/how-to-do-trammel-of-archimedes-animation' How to do Trammel Of Archimedes Animation?

Appendix 1

Utifrån trådmetoden och vår definition kan vi skapa olika formler. Vi sätter ut en mittpunkt i ellipsen och kallar storaxeln för *a* och lillaxeln för *b*. Vi kallar även avståndet från mittpunkten till en av våra brännpunkter för *c*. Snörets längd kan delas in i två delar som vi kallar för *d1* och *d2*. Punkten som 'pennan' är på har koordinaten (*x,y*)



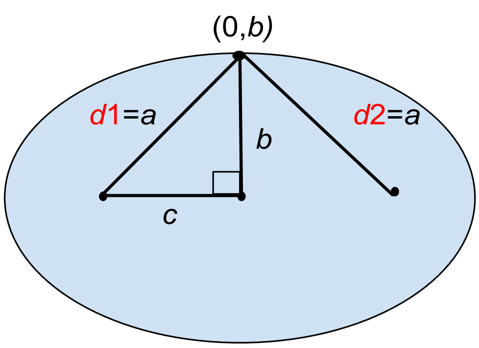




För att räkna ut längden av snöret så utgår vi från fallet när (*x,y*) = (*a*,0), alltså när pennan är i högra hörnet. *d*1 är i detta fallet *c*+*a* och *d*2 kommer vara *a*-*c*.

Eftersom snörets längd är konstant kan vi skriva formeln

$$d1\ +\ d2\ =\ (c\ +\ a)\ -\ (a\ -\ c)\ =\ 2a$$

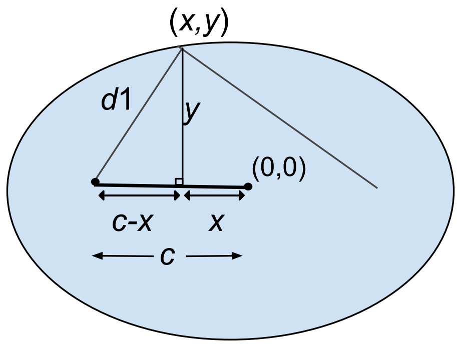


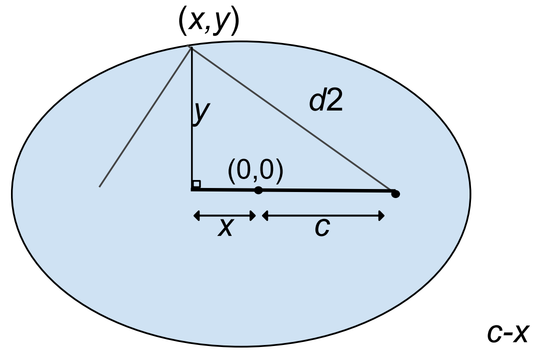
Nu utgår från fallet när (*x,y*) = (0,*b*), alltså när pennan är i övre hörnen. Eftersom *d*1 och *d*2 är lika stora i detta fallet så kommer

$$d1\ =\ d2\ =\ \frac{2a}{2}\ =\ a$$

Det skapas en rätvinklig triangel med sidorna *a, b* och *c*. Vi kan använda pythagoras sats för att få formeln $c^2\ +\ b^2\ =\ a^2$

Med hjälp av pythagoras sats får man även avståndsformeln som leder till längden $d1$ och $d2$ utifrån koordinaterna (x,y).





d1=(c-x)2+y2

d2=(c+x)2+y2

Eftersom vi vet att $d1 + d2 = 2a$ så kan vi skriva formeln:

$$\sqrt{(c - x)^2 + y^2} + \sqrt{(c + x)^2 + y^2} = 2a$$

Koordinater (x,y) är en godtycklig punkt på ellipsens kant. Vi vill dock skriva formeln med konstanterna a och b istället för a och c. Den går också att förenkla mycket.

$$\sqrt{(c - x)^2 + y^2} + \sqrt{(c + x)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(c - x)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(c + x)^2 + y^2} \qquad \text{(kvadrera)}$$

$$(c - x)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(c + x)^2 + y^2} + (c + x)^2 + y^2$$

$$c^2 - 2cx + x^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(c + x)^2 + y^2} + c^2 + 2cx + x^2$$

$$- 2cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(c + x)^2 + y^2} + 2cx$$

$$4a\sqrt{(c + x)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$

$$a\sqrt{(c + x)^2 + y^2} = a^2 + cx \qquad \text{(kvadrera)}$$

$$a^2(c^2 + 2cx + x^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

$a^2c^2 + 2a^2cx + a^2x^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$

$a^2c^2 + a^2x^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2$ flyttar runt termerna

$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$ faktorisera

$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$

Tidigare skapade vi formeln $c^2 + b^2 = a^2$ som vi kan skriva om som $b^2 = a^2 - c^2$. Nu kan vi byta alla $(a^2 - c^2)$ mot b^2 och får

$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ delar med a^2b^2

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Denna formel är ellipsens ekvation