Fördjupningsuppgift ellipser

NMCC - Sigma8

Sverige 2023 Vifolkaskolan 8A

Innehållsförteckning

Kapitel 1: Bakgrund och arbetsprocessen

1.1 Tolkning av uppgiften

När vi tog oss an uppgiften ansåg vi att det var viktigt att vi började med de matematiska delarna först innan vi började med utställningen och presentationen. Genom att gå till botten med hur man konstruerar en ellips blev det mycket lättare och effektivare att göra egna ellipser till vårt dekorativa mönster.

1.2 Disponering av arbetstid och lokal

För att kunna genomföra fördjupningsuppgiften har vi avsatt tid från våra mattelektioner och vi har även använt våra håltimmar för att få extra tid till arbetet. Vi har dessutom arbetat med uppgiften på vår fritid men då har ett problem varit att få med hela gruppen i arbetet. Det har krävts mycket organiserande arbete för att få hela klassen involverad i arbetet.

Det var inte möjligt att ta alla matematiklektioner till arbetet då vi samtidigt var tvungna att ligga i fas med vårt vanliga matematikarbete. Vi har kunnat använda flera olika lektioner för vårt arbete bland annat matte, bild och svenska.

Vi har haft användning av whiteboarden när vi skulle förstå oss på ekvationen för ellipsen. Vår första prioritering har varit ämnesrapporten eftersom den skulle in först. Vi har alltid skrivit den parallellt med vårt andra arbete med utställningen och presentationen.

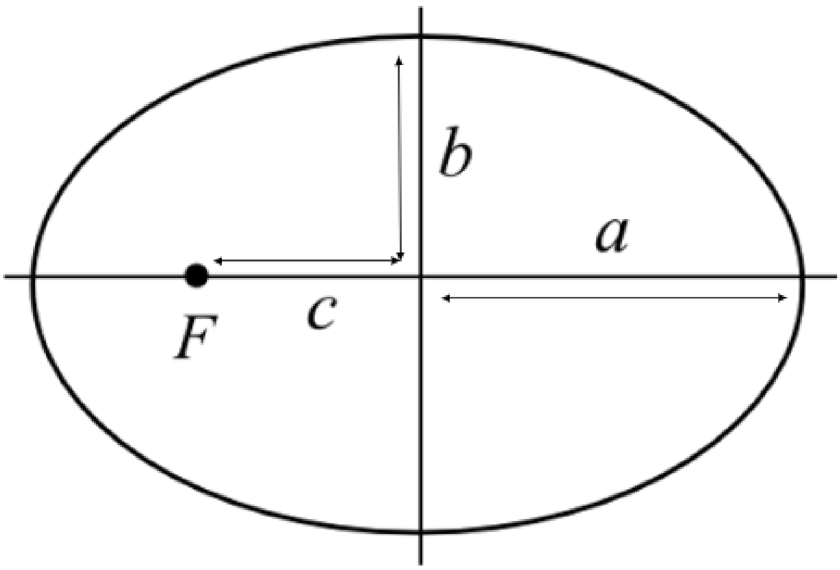
1.3 Problemområden

Ett problem vi har stött på är att vi vid första anblick av en källa har svårt att sätta oss in i de matematiska uträkningarna. Detta blir problematiskt då det tar extra mycket tid att komma i gång med arbetet vid varje arbetstillfälle. Dock blir det en styrka att vi är många som jobbar med uppgiften eftersom vi kan förklara och hjälpa varandra. Det dök även upp ett mindre antal problem när vi skulle använda 3D-skrivaren. Det första var att vi endast hade en yta av 15x15x15 cm. Det gjorde att vi fick tänka om kring vår idé om att skriva ut hela omloppsbanan med hjälp av 3D-skrivaren. I stället valde vi att endast skriva ut det som skulle bli planeterna och sedan arbeta med andra material för att skapa resten av modellen.

Kapitel 2: Den matematiska processen och egenskaper hos ellipsen

Vi kom fram till en rad egenskaper hos ellipsen:

- Det är ett rundat objekt utan hörn, som vid första anblick ser ut som en oval.
- Ellipsen har två brännpunkter, summan av avståndet mellan brännpunkterna och en bestämd punkt på ellipsens kant är den samma som storaxelns längd.
- Ju närmre brännpunkterna är medelpunkten, desto rundare blir ellipsen. Om brännpunkterna är närmre kanten blir ellipsen mer långsmal.
- Ellipsens area: $ab\pi$
- En ljus- eller ljudstråle som går från ena brännpunkten och reflekteras mot kanten, kommer att skära andra brännpunkten. Vi använder oss av reflektionslagen eftersom båda brännpunkterna är symmetriska.
- För att beräkna var brännpunkterna är i en ellips kan man använda sig av Pythagoras sats. Pythagoras sats säger att $a^2+b^2=c^2$, men i detta fall blir det $b^2+c^2=a^2$. För att räkna ut C, alltså avståndet mellan en brännpunkt och mittpunkten, tar man $c^2=a^2-b^2$.
- Excentriciteten är sambandet mellan C och A. En ellips har excentriciteten 0-1. Excentriciteten avgör hur hoptryckt ellipsen är. Två ellipser är likformiga om dess excentricitet är densamma. För att räkna ut excentriciteten tar man c/a.



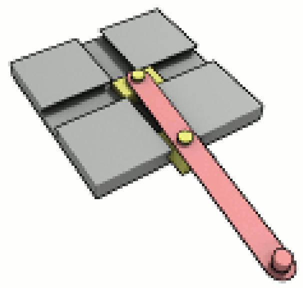
Kapitel 3: Olika sätt att tillverka ellipser

3.1 Två nålar och ett snöre

Det första sättet att tillverka en ellips som vi har studerat är med hjälp av två nålar och ett snöre. Man sätter fast nålarna med ett mellanrum på till exempel en träplanka eller en bit skumgummi. Sedan knyter man fast ena änden av snöret på en av nålarna och den andra änden av snöret knyter man fast på den andra nålen. Efter det spänner man snöret med en penna, och genom att spänna tråden hela tiden och dra pennan runt, får man en ellips som uppfyller villkoren för att vara just en ellips. En ellips har nämligen två brännpunkter och summan av avstånden mellan brännpunkterna och en punkt på kanten är alltid samma oavsett var på kanten man mäter. Snöret som sitter mellan nålarna är alltid lika långt och därför uppfyller den här metoden villkoren för att skapa en form som klassas som en ellips. Nålarna bestämmer var brännpunkterna är och snöret ska vara lika långt som 2a, alltså hela storaxeln. Ju tätare nålarna sitter och ju längre snöret är, desto rundare blir ellipsen.

3.2 Ellipsograf

Nästa sätt man kan använda för att tillverka en ellips som vi har studerat är att använda sig av en elipsograf. Den består av en så kallad “Arkimedes trammel” som genererar ellipser. Trammeln består av två “skyttlar” som är begränsade till två vågräta kanaler, eller skenor. Skyttlarna sitter ihop med fasta punkter på en gemensam stång men de kan röra sig och vara i andra vinklar än själva stången. När man drar runt stången kommer det att se ut som att båda skyttlarna rör sig fram och tillbaka i respektive skena. På den yttre kanten av stången sitter en penna som ritar ut ellipsen och det är detta som gör att Arkimedes trammel blir en ellipsograf. Det som avgör vilken form och storlek ellipsen får är hur lång stången är och var den är fastsatt i skyttlarna. Ju längre bort den ena skytteln är från den skytteln som är mot kanten, desto mer avlång blir ellipsen. En ellipsograf kan också ha tre eller fler skenor och fler skyttlar, men den med två skyttlar är den absolut vanligaste.



3.3 Matematiska ekvationer

En ellips kan beskrivas med en matematisk ekvation. En av de vanligaste ekvationerna är $((x-h)/a)^2 + ((y-k)/b)^2 = 1$, där (h,k) är centrumet av ellipsen och a är halva längden på ellipsens storaxel samt b är halva längden på ellipsens lillaxel. Genom att använda denna ekvation kan man rita ellipsen genom att sätta ut punkter som uppfyller ekvationen.

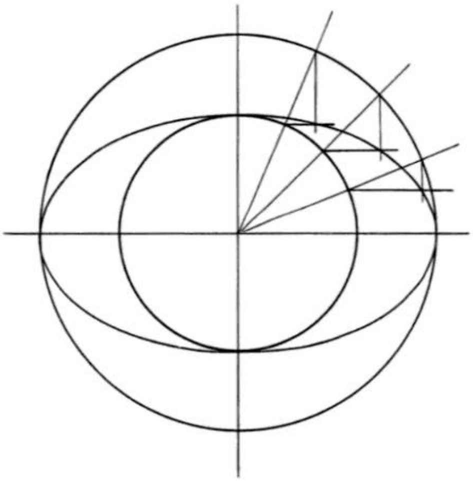
3.4 Andra metoder

Det finns en rad metoder där man sätter ut prickar som man sedan binder ihop för att få själva ellipsen. Dessa metoder funkar bra om man inte har så många verktyg för att göra ellipsen. Nedan beskriver vi tre metoder för att rita en ellips på papper:

3.4.1 Cirkelmetoden

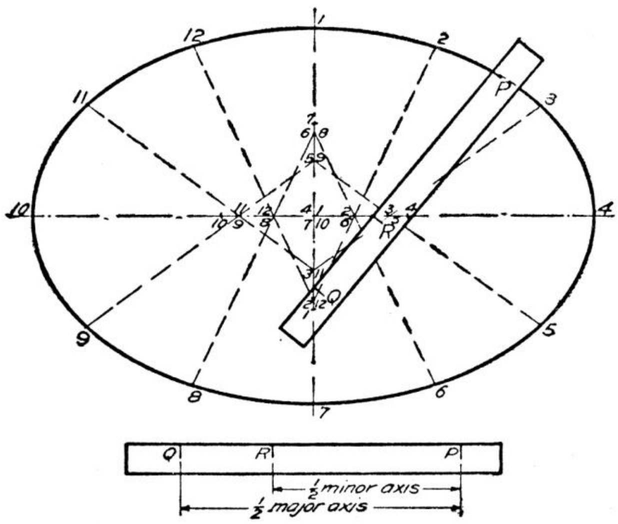
En cirkel är en sorts ellips där båda brännpunkterna är på samma plats, men vill man göra ellipser där storaxeln och lillaxeln är olika långa, kan man ta hjälp av cirklar. Man ritar ut en cirkel där diametern på cirkeln är lika stor som lillaxeln. Sedan ritar man en större cirkel som har samma mittpunkt som den mindre. Den större cirkelns diameter ska vara samma som storaxeln på den tänkta ellipsen.

Efter det gör man en rät linje som skär mittpunkten och kanten på båda cirklarna. Där den räta linjen skär den mindre cirkeln, gör man en vågrät linje bort från lillaxeln. Där den räta linjen skär den större cirkeln gör man en lodrät linje mot storaxeln. De två linjerna som ritats kommer att skära varandra och den punkten är en punkt på ellipsen. Man fortsätter göra linjer från mittpunkten tills man till slut kan rita ihop ellipsen för hand. Ellipsen som bildas kommer inte att bli helt perfekt eftersom man själv måste binda ihop punkterna som bildar ellipsen, men det är en bra metod om man bara har tillgång till papper, penna, linjal och cirklar.



3.4.2 Trammel-metoden

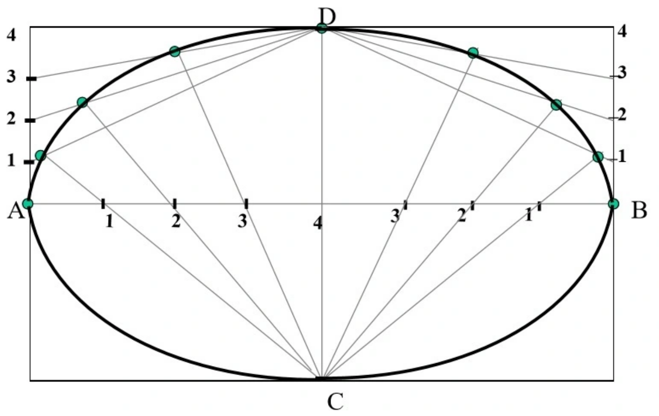
Trammel-metoden bygger på samma metod som ellipsografen (se avsnitt 2.2) men är mer manuell. Till sin hjälp använder man en trammel, som till exempel kan bestå av en långsmal pappersbit. Det första man gör är att bestämma hur lång storaxeln och lillaxeln skall vara för att sedan rita ut dem på ett papper. Efter det tar man trammeln och lägger längs med storaxeln. Man markerar på trammeln var kanten på storaxeln (Q) är och var mittpunkten (P) är. Sedan lägger man trammeln längs med lillaxeln så att P är vid slutet av lillaxeln och sedan markerar man vid mittpunkten med bokstaven R.



Bokstaven Q ska sedan alltid nudda lillaxeln medan bokstaven R alltid ska nudda storaxeln. Man flyttar runt trammeln och kan på så sätt sätta ut prickar vid P. Slutligen binder man ihop prickarna med linjer och då bildas en ellips.

3.4.3 Rektangelmetoden

Denna metod innebär att man ritar ut en rektangel där den längsta sidan på rektangeln ska vara lika lång som storaxeln medan den kortaste ska vara lika lång som lillaxeln. Efter att ha ritat ut rektangeln ritar man ut en horisontell linje (AB) som ligger parallellt med, och mitt emellan, sidorna på rektangeln. Man ritar också ut en vertikal linje (DC) som är parallell med de andra sidorna på rektangeln. Mellan A och mittpunkten delas linjen upp med 3 streck - 1,2 och 3. Samma sak sker från A och uppåt samt från B och uppåt.



Man börjar med att dra tre streck från D till 1,2 och 3 på båda vertikala kanterna av rektangeln. Sedan drar man streck från C, genom en av siffrorna på storaxeln och fram till det strecket som går från samma siffra som strecket tidigare skurit. Exempelvis drar man ett streck från C, skär 2 och drar strecket fram till det strecket som går mellan D och 2. Den punkten där D2-strecken och sträcket från C möts, är en punkt på ellipsen. Man kan sätta ut punkter och streck även på nedre delen av rektangeln och på så sätt få ut punkter även där. När man har fått ut alla punkterna binder man ihop ellipsen med streck.

Kapitel 4: Källor och källkritik

4.1 Användning av externa källor

När vi i början försökte ta reda på vad en ellips är och dess egenskaper var Wikipedia en källa där vi fann bra, tydlig information. Wikipedia är dock öppet för alla att redigera i och vi anser att detta inte är en pålitlig källa. Eftersom Wikipedia-sidan om ellipser grundande sig på en enda källa, Wahlström & Widstrands matematiklexikon, valde vi att låna denna bok på biblioteket för att kunna använda oss av en primärkälla. Vi har även tagit en del information ur en pdf-fil från Chalmers tekniska högskola i Göteborg, vilket vi anser är en pålitlig källa då detta är ett välkänt och etablerat lärosäte.

När vi inte kunde få ut mer information från de svenska källorna på nätet gick vi över till att leta fakta på engelskspråkiga sidor på internet. Det gav vissa utmaningar då ingen av oss var så bra på matematiska begrepp på engelska och när vi översatte sidorna blev det vissa grammatiska fel och översättningsfel.

4.2 Användning av interna källor

Vi har använt oss av vår mentor Carina när vi har stött på problem. Under hela processen är det vi elever som har lett arbetet och bestämt hur processen ska utformas. Eftersom Carina är en legitimerad lärare och har många års erfarenhet har Carina hjälpt oss med att förklara vissa begrepp som vi inte har förstått oss på eftersom hon är bra på att förklara svåra begrepp på ett enkelt sätt, vilket har gjort att vi har kommit vidare i vårt arbete.

En annan lärare på vår skola har kunnat hjälpa oss att skriva ut i 3D eftersom vi inte har kunskaper och erfarenheter av en 3D-printer sedan tidigare. Han har alltid berättat om det vi planerar är möjligt, men vi har alltid styrt och bestämt arbetet i slutändan.

4.3 Referenser

4.3.1 Tryckta källor

Abramson, J. (2018). Algebra and Trigonometry (OpenStax).

Downs, J. W. (2003). *Practical conic sections: the geometric properties of ellipses, parabolas and hyperbolas*. Courier Corporation.

Thompson, Jan; Thomas Martinsson (1991). Wahlström & Widstrands matematiklexikon. Wahlström & Widstrand

4.3.2 Elektroniska källor

https://hilmaafklint.se/sv/ (2023-03-23)

https://www.durosweden.se/ellips (2023-03-15)

https://consulting.surell.se/microstation/hitta-brannpunkterna-pa-en-ellips (2023-03-20)

https://americanhistory.si.edu/blog/ellipsographs (23-04-07)

https://en.wikipedia.org/wiki/Trammel_of_Archimedes (23-04-07)