Ellipser

UMK mattegrupp 8:4

NMCC Sigma 8

Sverige 2023

Innehåll:

Inledning s.3

Ellipsens Egenskaper s.3

Definition

Brännpunkter

Transversalaxel

Konjugataxel

Ekvation

Omkrets och area

Extra: superellipser

Metoder för Ellipser s.5

Genomskärning av kon

Brännpunkt med konstant

Grafisk ritning

Ellipser i Naturen s.7

Ellipser i Kulturen s.8

Problem vi stött på samt hur vi arbetat med dem s.11

Källhänvisningar s.11

Inledning

När vi först fick den här uppgiften så hade vi ingen aning vad en ellips var och vi tyckte det lät ganska tråkigt. För att få inblick i vad en ellips var så arbetade vi och gjorde research kring dess egenskaper och metoder för att skapa den. Metoden där man använder brännpunkter och en konstant var lätt för alla att förstå och kunde visas fysiskt. När vi hade fått en förståelse för ellipsens egenskaper och lärt känna några olika metoder satte vi oss ner och bestämde vilken information vi ville framföra i vårt arbete. Vi bestämde att vi först ville beskriva ellipsens kännetecken och egenskaper. Sen skulle vi beskriva olika metoder för att skapa ellipser och gå ner på djupet i tre olika metoder. Där fick vi problem med att förstå matematiken men alla delade med sig om det de själv förstod och vi tog hjälp av olika externa experter inom området. Detta gjorde att vi fick en allmän förståelse och kunde förklara de olika metoderna i texten. De som hade svårare att förstå tilldelade vi uppgiften att skriva om vilka användningar ellipsen kan ha och vart vi hittar den i natur och kultur. Men där stötte vi på ett problem då vi skrev för mycket. Därför fick vi ta bort det innehållet till förmån för det mer matematiska innehållet. Överlag har vi haft väldigt kul med uppgiften och lärt oss mycket av dess egenskaper. Vi har även lyckats förstå matematiken som ligger bakom.

Ellipsens Egenskaper

En ellips är ett geometriskt objekt som förekommer i flera olika matematiska och fysikaliska situationer. Exempel på ellipser är ovaler och cirklar, men en oval behöver inte vara en ellips.
Definition: En regelbunden oval form där summan av en punkt i formens avstånd från två andra givna punkter (brännpunkterna) är konstant. En ellips kan även definieras av resultatet när en kon skärs av ett snett plan som inte skär basen, samt som en uttänjning av en cirkel.
Brännpunkter: Två punkter inuti en ellips där summan av längden mellan ena brännpunkten och punkt P på ellipsens ytterkant och längden mellan andra brännpunkten och P alltid är konstant. Genom att bestämma denna konstant, samt brännpunkterna kan man rekonstruera ellipsen exakt. Om dessa punkter är placerade på samma ställe är ellipsen en cirkel.
Transversalaxeln: Den långa axeln i en ellips. Brännpunkterna är placerade på denna. Transversalaxeln råkar även vara lika lång som den konstanta sträckan nämnd ovan, mellan brännpunkterna och P.
Konjugataxeln: Den korta axeln i en ellips, som är vinkelrät mot transversalaxeln.
Excentricitet: För att veta hur platt en ellips är kan man använda dess excentricitet, e=c/a, där c är halva avståndet mellan brännpunkterna och a är halva transversalaxeln vilket är den längsta raka sträckan från ena sidan av ellipsen till den andra. Ju större excentriciteten är desto plattare är ellipsen.
Ekvation: Standardekvationen för en ellips lyder:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Denna ekvation är mest populär då den innehåller variabler som kan bestämma längden på axlarna, excentriciteten samt ellipsens mittpunkt. Variablerna a och b bestämmer ellipsens bredd respektive höjd. Höjden blir 2a, medan bredden blir 2b. H och k bestämmer sedan ellipsens mittpunkt (h,k). Ifall mittpunkten är densamma som origo (h=0, k=0) så hamnar slutet av ellipsens transversalaxel på a och -a, medan slutet av ellipsens konjugataxel hamnar på b och -b. Se även “metoder för ellipser: Grafisk ritning” för en djupare förklaring av ekvationen, samt en motivering till hur ekvationen fungerar enligt pythagoras sats.

För en ellips skriven efter ekvationen ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, en ellips vars mittpunkt är på origo) ligger brännpunkterna (så länge $a \geq b$) på (c,0) och (-c,0) där $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, detta enligt pythagoras sats då a, b och c bildar en rätvinklig triangel där a är hypotenusan, då a, som tidigare nämnt motsvarar halva transversalaxeln och därför även är halva summan av längden mellan brännpunkterna och en punkt P. Om denna punkt P ligger på ellipsens konjugataxel så är sträckorna mellan ena brännpunkten och P och andra brännpunkten och P lika långa, vilket resulterar i att de blir sida a som sträcker sig från ena brännpunkten (slutet på kant c) till P (som ligger i slutet på kant b, halva konjugataxeln).

Area och omkrets: Ellipsens area beräknas simpelt med formeln $\pi \cdot a \cdot b$, vilket liknar formeln för cirkelns area men återigen med r utbytt mot a och b, som motsvarar halva transversalaxeln och halva konjugataxeln. Omkretsen är klurigare, och kan inte beräknas med några elementära funktioner så länge a och b inte är lika med varandra. Somliga inte alltför svåra formler kan ge en god approximation av omkretsen, men en oändlig potensserie krävs för en exakt beräkning.

Superellipser:

En superellips är en geometrisk form relaterad till ellipsen. Den är en utvidgning av en ellips, där man bytt ut tvåan i exponenterna mot en variabel. Ekvationen för en superellips lyder:

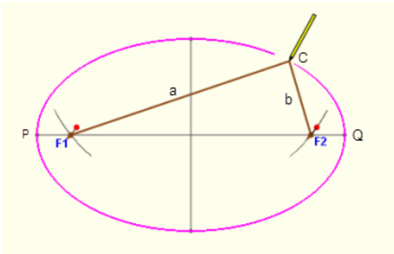
$$\left|\frac{x}{a}\right|^n + \left|\frac{y}{b}\right|^n = 1$$

Då dessa former som ekvationen skapar inte ingår inom begreppet ellips kommer vi inte att dyka särskilt djupt på området, men vi gör ändå en kort genomgång av dessa former. Det första vi kan se redan i ekvationen är att denna form är en ellips där man bytt ut tvåan i variabeln mot n, en variabel, vilket tillåter en att skapa utvidgade och kollapsade former av ellipsen. Strecken som ersatt parenteserna i ekvationen var ett nytt koncept för oss, och det tog ett tag att förstå dess mening. De betyder “absolut värde av” eller “antal från 0”, vilket innebär att ifall det inuti tecknet är negativt, så ignorerar vi det och säger att det är positivt. Detta är inte nödvändigt i ellipsens ekvation, då något upphöjt till två alltid blir positivt.
Formerna man kan uppnå med denna ekvation är:
Om 0>n>1 liknar formen en fyrhörnad stjärna med konkava sidor.
Om 1>n>2 liknar formen en romb med något konvexa sidor.
Om n=2 är formen en ellips
Om n>2 liknar formen en kvadrat med rundade hörn (kvirkel)

Metoder för ellipser

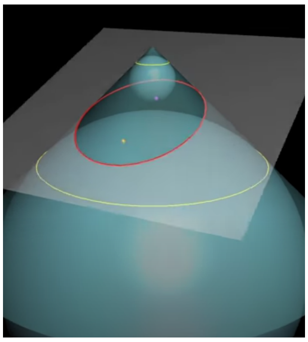
Metod 1. Brännpunkter och en konstant

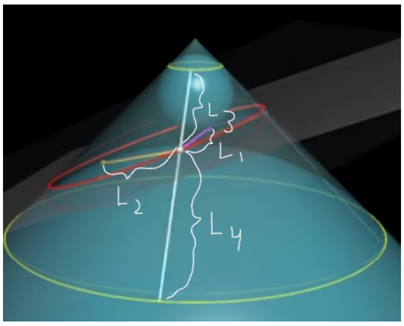
Man kan använda två brännpunkter, en penna och en tråd för att rita en ellips. Denna metod tar i bruk det faktum att sträckan a+b är konstant oavsett vart på kanten C är fixerad.
Man sätter två parallella punkter vilka bildar transversalaxeln, exempelvis spikar, på ytan där man ska rita ellipsen. Dessa motsvarar brännpunkterna. Sedan tar man en tråd och knyter fast ändarna i varsin spik. Denna trådens längd representerar sträckan a+b vilket är den sammanlagda sträckan till brännpunkterna från en punkt vid ellipsens kant. Sträck sedan tråden med hjälp av en penna. Genom att med pennan hålla tråden sträckt kan man rita halva ellipsen, och om man sedan sträcker tråden på samma sätt fast på andra sidan av brännpunkterna kan man rita klart ellipsen eftersom sträckan a+b kommer förbli konstant vilket uppfyller kriterierna för en ellips.



Metod 2. Genomskärning av kon

Även kallat kägelsnitt. När en kon skärs av ett plan med mindre lutning än konens sidor, och planet inte skär konens botten bildas en perfekt ellips. Då en av definitionerna för en ellips är just denna metod, kommer vi bara att förklara hur denna metod ger samma resultat som metoden ovan. Vi har en ellips som är ett snitt ur en kon. Vi sätter sedan ett klot under ellipsen och ett klot över ellipsen. Kloten nuddar vid och är tangent med (har samma lutning som) ellipsen på ett ställe, medan de nuddar vid och är tangent med konen vid varje punkt i en cirkel (se bild). De två punkter som kloten nuddar vid är ellipsens brännpunkter. Vi ritar sedan linjer från brännpunkterna till en punkt på ellipsen, P. Vi kallar dessa linjer L_1 och L_2. Dessa linjer nuddar nu vid kloten, men är även tangenter till kloten. Vi ritar nu en linje från tangentcirkeln vid övre klotet till tangentcirkeln vid undre klotet som delas av punkt P (Se bild). vi kallar dessa linjer L_3 och L_4. När vi flyttar på P nedåt längs ellipsen blir L_3 längre och L_4 kortare, men summan av L_3 och L_4 förblir densamma. Detsamma gäller för L_1 och L_2, längden från brännpunkterna som användes i metod 1. Det råkar faktiskt vara så att L_1 och L_3 är samma längd, medan L_2 och L_4 är samma längd, därför är dessa metoder ekvivalenta.



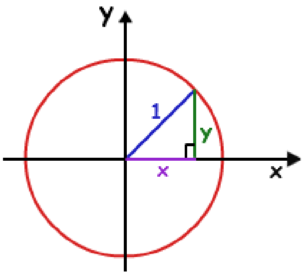


Metod 3. Grafisk ritning

Ekvationen $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ skapar en ellips när den ritas grafiskt. $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

För att förstå denna ekvation bättre kan vi studera den simplifierade ekvationen som används. för att skapa en cirkel, $x^2 + y^2 = r^2$. En cirkel är ett specialfall av en ellips där a (halva transversalaxeln) = b (halva konjugataxeln). När a och b är lika med varandra behandlar man dem som en ensam variabel, r, radien, vilket tillåter oss att multiplicera båda leden med r^2 ($\frac{(x-h)^2+(y-k)^2}{r^2} \cdot r^2 = 1 \cdot r^2$) Vi antar sedan att h och k = 0, vilket ger ekvationen ovan.

Varför bildar nu ekvationen en cirkel? Om man bestämmer en punkt på cirkeln (x,y) så bildar x, y och r en rätvinklig triangel där x och y är kateter och r är hypotenusan (se bild nedan).



(r = 1) Pythagoras sats visar nu att cirkeln r byggs av alla punkter vars x-värde i kvadrat adderat med y-värde i kvadrat blir r i kvadrat, det vill säga varje punkt vars x-värde, y-värde och r bildar en rätvinklig triangel. Detta betyder att formen som bildas utgörs av varje punkt som är precis r från cirkelns mittpunkt, då x och y kommer att förhålla sig enligt ekvationen och pythagoras sats. Ellipsens ekvation är som tidigare nämnt cirkelns ekvation men med två olika värden istället för r, vilket tillåter en att manipulera längden på axlarna oberoende av varandra. Detta bildar en perfekt ellips, då den totala sträckan från brännpunkterna till punkt P i ellipsen kommer att förbli konstant. Vi kan också nämna att en perfekt ellips som inte är en cirkel är omöjlig att rita med endast passare och linjal, då man skulle behöva rita en kurva som varken är en linje eller en cirkelkurva.

Problem vi stött på samt hur vi arbetat med dem

Det faktum att vi har jobbat med andra saker under tiden vi haft att skriva denna rapport har bidragit till att den nedprioriterades och vi har därför behövt anstränga oss extra mycket under den sista tiden. Men vi har under de senaste två veckorna ändå lyckats skriva mer än vad kriterierna tillät och behövde därför skala ner, och fokuserat våra tecken på den rena matematiken. Eskil Avelin i vår klass har varit sjuk mycket under tiden som vi arbetat med rapporten, vilket har försvårat arbetet då han har varit drivande i projektet. Han har ändå kunnat skriva och hjälpa online, och vi har lyckats koordinera ihop arbetet ändå.Vi har haft en del problem med att förstå en del av matematiken bakom det hela, men vi har hjälpts åt att förklara för varandra och diskuterat tillsammans samt fått hjälp av lärare för att få klarhet i saken. Både vår ordinarie mattelärare Sara Lööw och en gymnasielärare i matematik har hjälpt att förklara saker för oss. Eskil Avelin har dessutom även talat med sina föräldrar samt äldre syskon som är utbildade inom matematik och han har på så sätt fått en förståelse som han kunnat sprida kunskap till resten av oss.

Ett extra tack

Vi vill ge några extra tack till de lärare och matematiker som hjälpt oss förstå uppgiften:

-Sara Lööw, mattelärare på UMK, som hjälpt till administrativt

-Niklas Zetterling, specialmattelärare på Katedralskolan, som förklarat grafisk ritning för oss

-Jonas Avelin, tidigare Lektor inom och doktor inom funktionalanalys på Uppsala Universitet, som hjälpt oss förstå ellipsens ekvationer på ett djupare plan

-Helen Avelin, doktor inom kaosteori på Uppsala Universitet, som gjort detsamma

Källor

https://sv.wikipedia.org/wiki/Ellips_(matematik)
https://sv.wikipedia.org/wiki/Pluto

wikimedia
tekniska Museet
https://www.britannica.com/science/ellipse
https://www.nasa.gov/
https://www.bbc.com/
https://snl.no/ellipse_-_matematikk