

Fördjupningsarbete Ellipser

NNMC - Sigma 8

2023

Sverige

Europaskolan Rogge, klass 8 spets

Innehållsförteckning

Innehållsförteckning	1
1 Introduktion	2
2 Arbetsgång	2
2.1 Klassens arbete	2
2.2 Utmaningar	2
3 Ellips och ellipsens egenskaper	3
4 Matematiska processen	3
4.1 Erhållna lösningar	4
5 Exempel i natur och kultur	5
5.1 Keplers lag	5
5.2 Colosseum	7
5.3 Övriga	7
6 Resurser	7
6.1 Material	7
6.2 Lärare samt externa experter	7
6.3 Referenser	8
7 Reflektion	8
8 Källförteckning	8

1 Introduktion

När klassen fick beskedet om att ha gått vidare till semifinal i NNMC-Sigma 8 blev alla väldigt glada och förvånade. Klassen blev genast oerhört engagerade och förväntansfulla inför denna fördjupningsuppgift som handlar om ellipser. Klassen ska hitta olika metoder för att skapa ellipser samt hitta exempel på ellipser i natur och kultur. Vi ska även skapa en utställning och sedan presentera ellipser samt vårt arbete inför en jury. Klassen ville börja arbeta omedelbart.

2 Arbetsgång

2.1. Klassens arbete

Vi samarbetade med att komma på elliptiska saker som förekommer dels i vår vardag, men även i kultur och natur. Vi kom på många olika möjligheter, men valde bort några efter att ha genomfört en undersökning om de faktiskt var ellipser. I slutändan kom klassen överens om tre exempel från kultur och natur som var ellipser. Efter många idéer och skisser på utställningen började vi arbeta med den. Till vår hjälp hade vi bildläraren Jenny Ädel.



2.2. Utmaningar

Under arbetets gång har klassen stött på flera olika svårigheter och utmaningar. Vi har diskuterat och samarbetat för att hitta de bästa lösningarna på de problemen som uppstått.

Ett exempel på problem var att vi var osäkra på om vissa metoder faktiskt blir ellipser. Vi frågade då Johan Wild som är gymnasielärare. Vi försökte mäta och testa om de uppfyllde ellipsens egenskaper, vilket bland annat är att summan av två avstånd till fokalpunkten (se 3) är konstant. Om två personer står vid varsin fokalpunkt i ett elliptiskt rum så hör de alltid vad den andre säger. Detta beror på att ljudet varje gång studsar i en lika lång konstant sträcka. Detta gäller även om det är mycket ljud runt omkring.

För att säkerställa att vissa metoder uppfyller ellipsens egenskaper, testade vi att göra dem i Geogebra. Till exempel så var det en metod som skapade en form med en cirkels kontur och en för skarp kurva. Därmed inte en ellips. Två av de metoder som fungerade valde vi sedan som exempel.

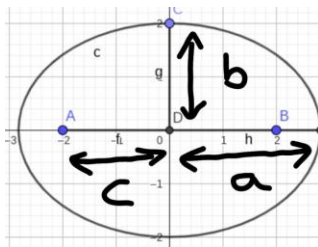
3 Ellips och ellipsens egenskaper

En ellips uppfyller följande egenskap:

1. *Summan av avståndet från en punkt på ellipsen till fokalpunkterna är konstant*

Fokalpunkter, som också benämns brännpunkter, är två punkter som förekommer i ellipser som måste placeras rätt för att egenskapen ska uppfyllas.

En ellips kan beskrivas på ett algebraiskt sätt. En ellips är lösningsmängden till en kvadratisk form som uppfyller villkoret $b^2 < 4ac$. Om axlarna i en ellips ligger parallellt med koordinataxlarna är detta det generella uttrycket för en kvadratisk form: $ax^2+bx+cy^2=1$, där a, b och c är koefficienter. Ellipsen behöver även vara "bredare" än vad den är "hög".



4 Matematiska processen

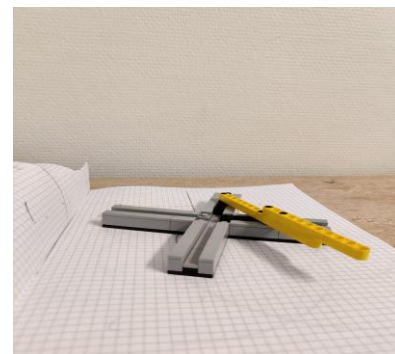
Vi har tagit fram metoder genom att besöka olika källor för att se förslag. Vi har även fått information från Johan igen för att öka förståelsen för ellipser. Efter att klassen tillsammans framställt ett antal metoder så var det dags att med hjälp av vår kunskap kontrollera metoderna för att se om de fungerar. Detta gjorde vi med hjälp av en hemsida som heter Geogebra och består av ett koordinatsystem som innehåller verktyg för att skapa geometriska former. Vi ritade metoderna och sedan kunde vi sätta en ellips på fokalpunkterna för att se att den stämmer.

Efter att vi kommit fram till några olika metoder så började vi fråga oss om hur man kunde veta var fokalpunkterna skulle befinna sig. Vi försökte ta reda på det med hjälp av Google och Youtube. Efter ett tag så lyckades vi få fram dels en matematisk lösning men även en lösning på problemet då man inte behövde mått utan bara en passare.

4.1. Erhållna lösningar

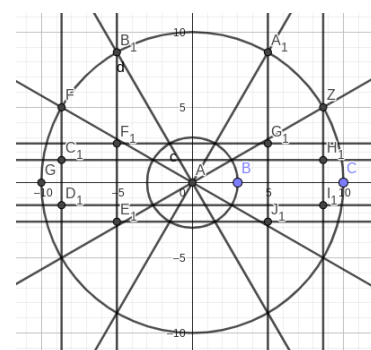
Vi tog fram följande metoder för att rita en ellips: Trammel of Arkimedes, spik- och snöremetoden, klockmetoden, rutnäts-metoden och dubbel pappersmetoden. Vi tog fram dessa med hjälp av verktyg och kontrollerade samtliga. Även om flera av dem stämmer så är det vissa som är mer komplicerade och kräver att man följer många steg väldigt noggrant.

“Trammel av Arkimedes”, även kallad ellipso graf, är ett redskap som gör perfekta ellipser. Det var den grekiske matematikern, fysikern och uppfinnaren Arkimedes som uppfann trammeln. Den består av två bitar i två vinkelräta rännor. En stång är fäst till bitarna och när bitarna rör sig fram och tillbaka i rännorna rör sig änden av stången i en elliptisk bana. Vanligtvis kan man justera stångens fäste på bitarna för att variera storleken och formen på ellipsen.



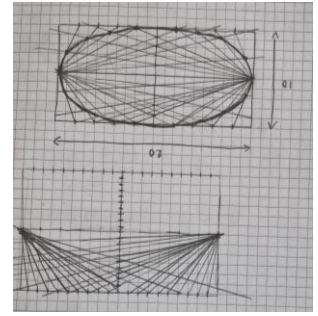
I spik- och snöremetoden används två spikar som sätts på valfri plats och sedan blir fokalpunkterna. Efter att spikarna är placerade sätts ett snöre runt spikarna. Genom att placera en penna i snöret och dra ut den så långt som möjligt kan man rita en ellips. Denna metod funkar eftersom snörets längd är konstant hela tiden, avståndet från en punkt på ellipsen till de två fokalpunkterna, i detta fall spikarna, är konstant.

Klockmetoden är en metod som ger punkter i en ellips, men det kommer aldrig att bli en exakt ellips eftersom oändligt många punkter krävs. Man börjar med att rita en cirkel och en större cirkel med samma mittpunkt. Den stora cirkeln delar man upp i tolv delar. Sedan ritas ut linjer som går parallellt med x-axeln och till skärningspunkten mellan den inre cirkeln och linjerna som delar cirkeln i tolv delar. Därefter skapar man en vinkelrät linje från skärningspunkterna mellan den yttre cirkeln och linjerna som delar cirkeln i tolv delar ner till de parallella linjerna. Därpå markerar man skärningspunkterna mellan de vinkelräta linjerna och de parallella linjerna. Alla dessa punkter blir då punkter på ellipsen.



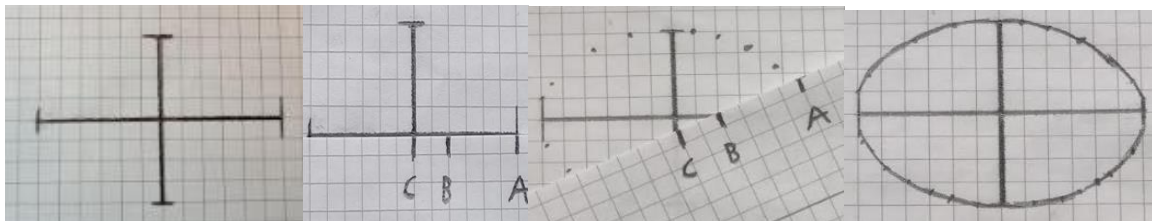
Rutnätsmetoden är en metod då man ritas upp en rektangel och ett kors i mitten. Man delar sedan alla sträckor i valfri mängd delar, tex 5 delar, och drar därefter streck mellan vissa

skärningspunkter. Efter att detta är gjort kommer det att finnas många skärningspunkter och dessa kommer att befinna sig på ellipsen.



Dubbelpapper-metoden:

1. Rita ett koordinatsystem och markera två kanter per axel på papper 1 (Bild 1)
2. Lägg ett annat papper, papper 2, längs x-axeln och markera punkt **C** vid origo och punkt **A** vid x-axelns kant. Vrid papper lodrätt så att punkt **A** hamnar på kanten på y-axeln. Markera punkt **B** vid origo. (Bild 2)
3. Placera papper 2 på papper 1 så att punkt **C** är på y axeln och **B** på x-axeln (Bild 3). Markera en punkt vid **A** (Bild 3)
4. Fortsätt vrida papper 2 moturs på samma sätt som innan och markera punkterna på ellipsen (Bild 4)
5. Rita en kurva på punkterna för att få en ellips (Bild 4)



5 Exempel i natur och kultur

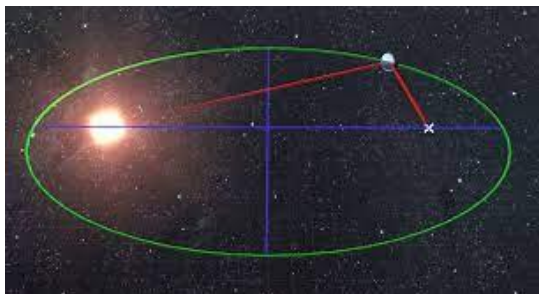
Vi valde vilka exempel på ellipser från natur, omgivning och den kulturella världen fastnade vi för omloppsbanor i rymden och Colosseum. Vi ansåg att omloppsbanorna var ett mycket bra alternativ då de baseras på Keplers lagar. Vi bestämde oss för att ha rymdtema på utställningen. Colosseum är ett kulturarv, vilket väckte vårt intresse.

5.1 Keplers lagar

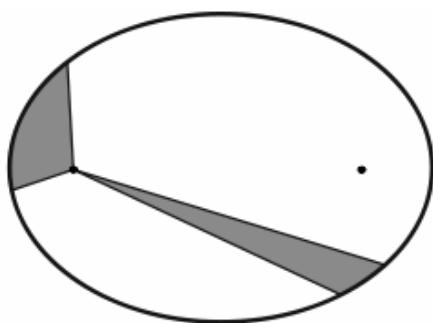
Den tyska matematikern, fysikern och astronomen Johannes Kepler (1571-1630) var intresserad av himlakropparnas rörelse och skrev tre lagar. Keplers tre lagar är:

1. *Planeternas banor är ellipser med solen i ena brännpunkten*
2. *Rörelsen längs varje ellips sker med en sådan hastighet att linjen från solen till planeterna på lika tid överför lika stor area.*
3. *Kvadraten på planeternas omloppstider förhåller sig som kuberna på deras medelavstånd från solen.*

Den första lagen beskriver att planeterna rör sig runt solen i ellipsformade banor. Kepler ändrade sin tankegång från en geocentrisk världsbild till en heliocentrisk världsbild. Inte många år senare sa Galileo Galilei samma sak och instämde om omloppsbanorna, vilket stärker teorin.



Det förhållandet som finns mellan planeternas hastighet på ellipsen förklaras av den andra lagen. När en planet flyttar sig, från en punkt till en annan i en elliptisk omlopps bana, bildas en sektor. Sektorns tre spetsar är vid de två punkterna på ellipsen samt en punkt i ellipsen. Punkten i ellipsen kan till exempel ersättas med solen. Om en planet har flyttat sig lika långt tidsmässigt är arean av sektorn som bildas alltid lika stor oavsett vart i ellipsen som planeten finns.

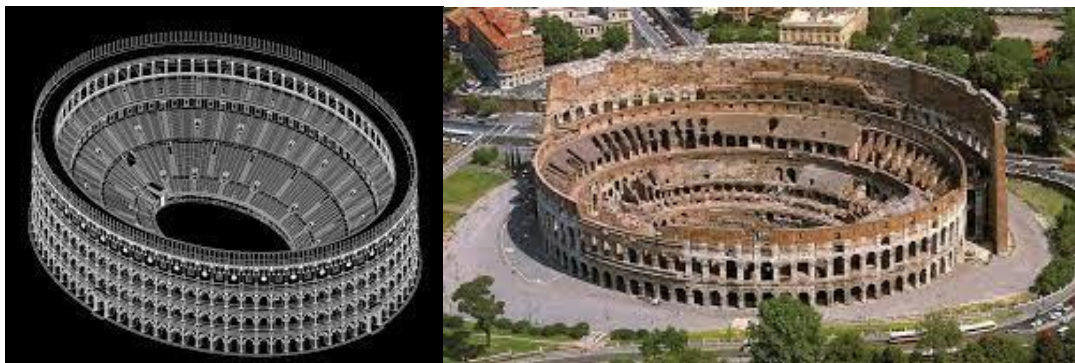


Den tredje av Keplers lagar beskriver en formel som ger en gemensam konstant för alla planeter och deras omlopps bana. Denna konstant får man fram genom att ta kubiken på den tid som det tar för planeten att färdas ett varv på ellipsen och sedan dividera med kubiken av medelradien mellan planetens omlopps bana och solen. I detta sammanhang är solen punkten i ellipsen. Formeln är T^2/r^3 (T=tiden, r=medelradien).

5.2 Colosseum

Colosseum, även kallad Flaviska amfiteatern, är en amfiteater i Rom som invigdes av kejsar Titus 80 e.Kr. Ursprungligen avsedd för främst gladiatorspel och djurstrider under antiken, men

Idag är Colosseum däremot berömd som en turistattraktion och världens största amfiteater. Colosseum anses i allmänheten vara ellipsformad med en omkrets på 524 meter. Den är 189 meter lång och 156 meter bred.



5.3 Övrigt

Vi har hittat många andra ellipser i både natur och kultur. Vi har upptäckt att en ficklampa kan bilda en ellips, avståndet mellan ficklampan och ljusets yta samt ficklampans lutning avgör avstånd mellan fokuspunkterna. Men man kan också skära en kon på ett icke vågrätt sätt, vilket ger en elliptisk skärningsyta.

6 Resurser

6.1. Material

Vi har använt oss av många olika material och resurser som passare, linjaler, papper, pennor, saxar och olika digitala verktyg för att kunna rita. Vi har t.ex köpt in canvas och flörtkulor. För att skapa ställningen med de elliptiska omloppsbanorna fick vi hjälp av hantverkaren Stefan Svanberg på Q svan AB. Han svetsade dem efter en ritning som gjorts.

6.2. Lärare samt externa experter

I februari fick vi besök av gymnasieläraren Johan Wild. Han presenterade om ellipsens egenskaper och grundläggande saker så att vi fick veta om vad som var speciellt med ellipser, bland annat definitionen och formeln för att en form ska vara en ellips. Det var även en kort presentation om hur ellipser uppstod vilket gav oss kunskap om ellipsens bakgrund. Johan visade också spelet Euclidia. Den 20 mars mötte fem elever Johan vid Europagymnasiet och fick sedan en timme och 20 minuters fördjupning om ellipser och ellipsens ekvationer. Därefter erbjöds eleverna att få delta på en matematiklektion. Det var matte 5 med årskurs tre på gymnasiet som handlade om kombinatorik. Lektionen var väldigt lärorik.

6.3 Referenser

Anna Mustafa
Legitimerad matematik- och
fysiklärare
Anna.mustafa@europaskolan.com

Johan Wild
Matematik- och fysiklärare,
gymnasiebehörig
Johan.wild@europaskolan.com

Jenny Ädel
Grafisk designer, bildlärare
Jenny.adel@europaskolan.com

Elisabet Forsell
Svensk- och SO-lärare
elisabet.forsell@europaskolan.com

Therese Björklund
Svensk- och engelsklärare
therese.bjorklund@europaskolan.com

Stefan Svanberg
Hantverkare
qsvan@hotmail.com

7 Reflektioner

Under arbetet har vi utvecklats på många olika plan. Vi har utvecklat vår förmåga att utreda våra egna metoder och fatta beslut utifrån våra slutsatser. Vi har även blivit bättre på att söka information och vara källkritiska till dem. Vår kunskap om ellipser har ökat kraftigt och vår samarbetsförmåga har förbättrats.

Om vi skulle få uppgiften igen skulle vi lägga mer fokus vid planering. Vi insåg mot slutet av arbetet att vi inte hade någon bra planering och vi alla blev stressade. Skulle vi planerat bättre hade vi haft mer tid att lägga på andra saker. Vi är annars överens om att vi gjorde det bra, men att vi skulle tagit initiativ själva för uppgiften tidigare.

8 Källförteckning

Bilderna:

1-10, tagna av elever i 8 spets

11-14, hämtade från Google

<https://kattyzhao.com/2-5-Colosseum>

https://www.mozaweb.com/sv/Extra-3D_scener-Keplers_lagar-208283

https://sv.wikipedia.org/wiki/Keplers_lagar#/media/Fil:Kepler-second-law.svg

<https://www.wonders-of-the-world.net/Colosseum/Dimensions-of-the-Colosseum.php>

[Geogebra](#)

Johans hemsida: [Progress3](#)

<https://www.youtube.com/watch?v=iM-r8bhTT8k>

https://www.youtube.com/watch?v=A_GiKqboCp0

<https://www.formelsamlingen.se/alla-amnen/fysik/astronomi/keplers-lagar>

<https://www.obliczeniowo.com.pl/128>