TETRAEDER

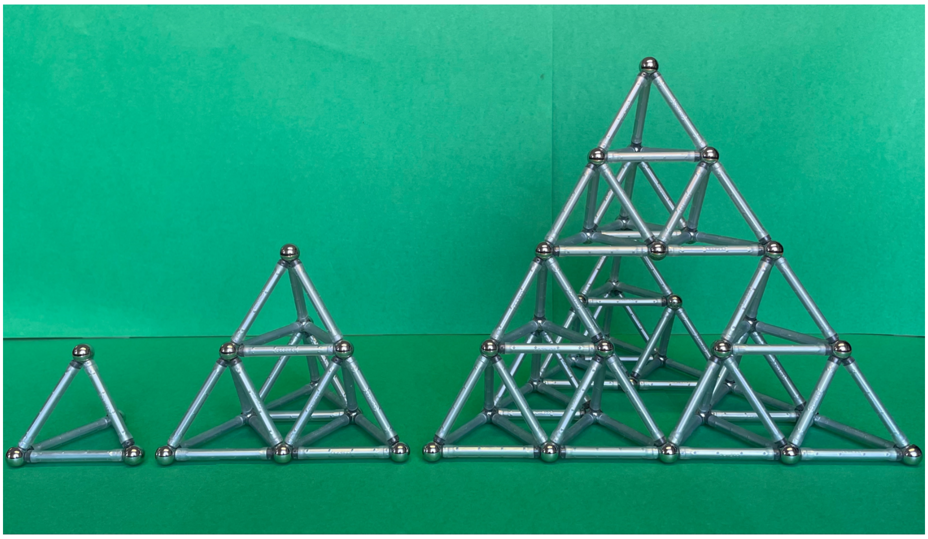
NMCC SIGMA8 2022
TÄBY FRISKOLA 8 SPETS
SVERIGE

Innehållsförteckning

Inledning

Vi kände igen tetraedrarnas geometriska form och blev genast intresserade av uppgiften. Vi delade in oss i grupper för att få flera perspektiv på uppgiften. Några utsågs till projektledare för att arbetet skulle gå framåt på ett effektivt sätt. I början av skrivandet gick det långsamt. Efter ett tag lärde vi oss hur vi skulle arbeta och vikten av att ta rast.

Vi använde Geomags som fanns i skolan och kom snabbt igång. Det föddes många kreativa idéer om hur tetraedrarna var uppbyggda. Vi skapade flera bilder och tabeller med olika lösningar som vi nu redovisar i denna rapport. Vi har bland annat använt Geogebra för att skapa bilder och underlätta arbetet.



Tetraedrarna är uppbyggda av pinnar och kulor. Vi ska undersöka hur antalet pinnar och kulor hänger ihop med figurens nummer samt hitta lösningar för att beräkna antalet av dessa i vilken figur som helst.

Vi använder variablerna:

n: figurens nummer

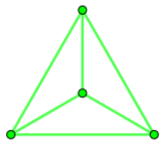
b: antalet pinnar

a: antalet kulor

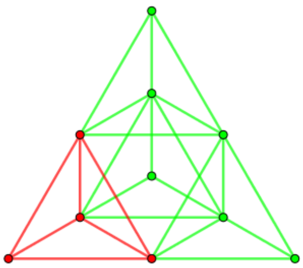
Pinnar

Metod Minitetraedrar

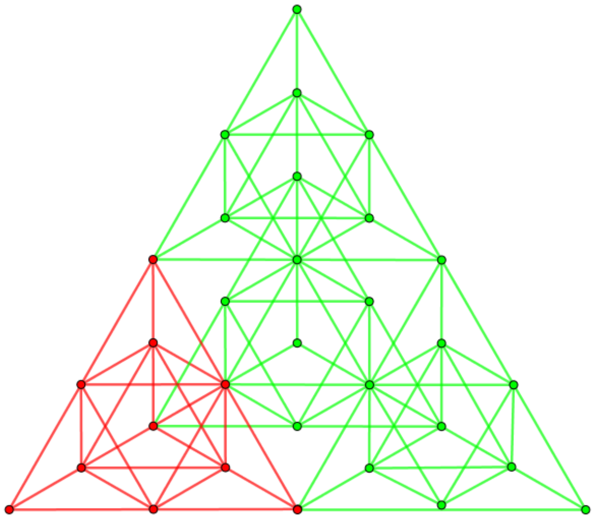
En tetraeder består av 4 föregående tetraedrar, t.ex. figur 3 består av 4 stycken figur 2. Antalet pinnar i en figur får vi genom att multiplicera antalet pinnar i den föregående figuren med 4.



Figur 1



Figur 2



Figur 3

Det röda är den föregående figuren. Det gröna som tillkommer består av 3 röda figurer.

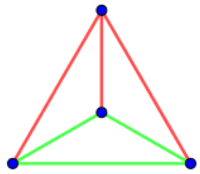
n	b	Produkt
1	6	$6 \cdot 4^0$
2	24	$6 \cdot 4^1$
3	96	$6 \cdot 4^2$
4	384	$6 \cdot 4^3$

Utifrån tabellen märker vi att antalet multiplikationer med 4 som krävs är 1 färre än figurens nummer enligt formeln:

$b = 6 \cdot 4^{n-1}$

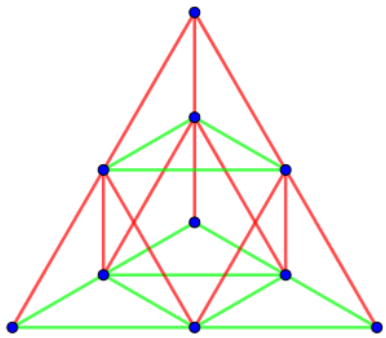
Metod Pinnar i lager

Vi testar idén att dela upp antalet pinnar i vinklade och horisontella. I figur 1 finns det 3 vinklade och 3 horisontella pinnar.



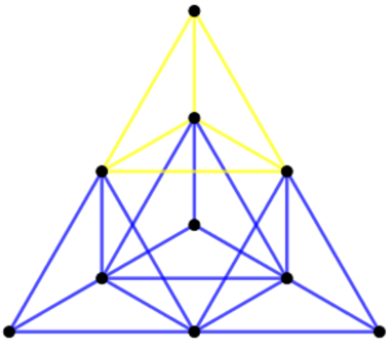
Figur 1

Under varje ny figur läggs ett lager till som består av 3 likadana tetraedrar. Det betyder att det sitter 3 gånger så många vinklade och horisontella pinnar i det nya lagret. I figur 2 finns det 12 vinklade och 12 horisontella pinnar.



Figur 2

I det övre lagret finns det 6 pinnar totalt och i det undre finns det $6 \cdot 3 = 18$ pinnar totalt. Se nedanstående bild.



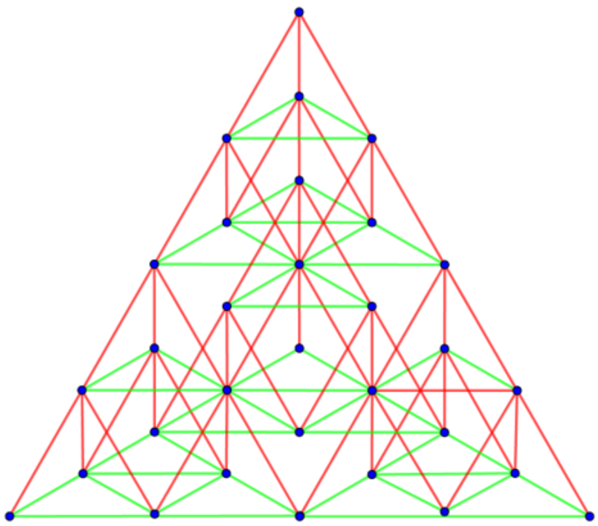
Figur 2

Bild på tetraeder i lager.

Dessa pinnar skriver vi som:

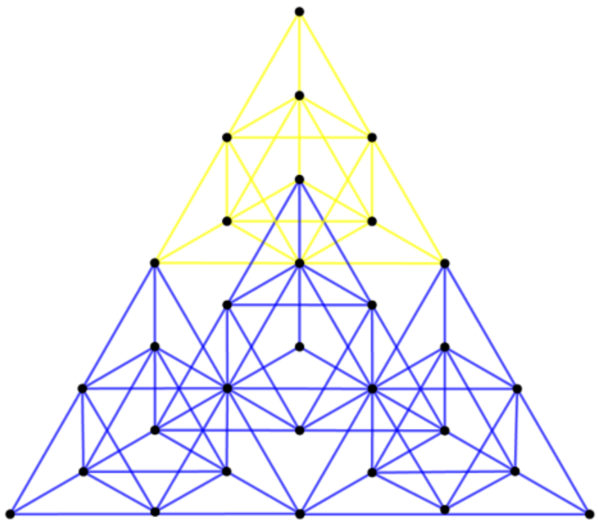
$3 + 3 + 9 + 9$

I figur 3 finns det 48 vinklade och 48 horisontella pinnar.



Figur 3

I det övre lagret finns det 24 pinnar och i det under finns det 72 pinnar. Se nedanstående bild.



Figur 3

Vi visar antalet vinklade och horisontella pinnar i respektive färg i en tabell. Pinnarna är också markerade om de är i det övre eller undre lagret.

n	Vinklade	Horisontella	b
1	3	3	$3+3=6$
2	$3+9$	$3+9$	$12+12=24$
3	$3+9+9+27$	$3+9+9+27$	$48+48+96$
4	$3+9+9+27+$ $9+27+27+81$	$3+9+9+27+$ $9+27+27+81$	$192+192=384$

Ex. figur 3

Vi tar antalet horisontella pinnar i det övre lagret. Det är 3 och 9 pinnar. Vi multiplicerar det med 3 för att få antalet horisontella pinnar i det undre lagret. Eftersom det är lika många horisontella pinnar som vinklade multiplicerar vi detta med 2 för att få det totala antalet pinnar i figur 3.

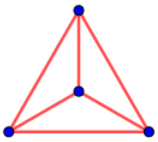
$2 \cdot (3 + 9 + 3 \cdot (3 + 9))$

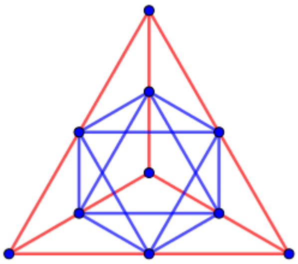
Sambandet skrivs som en rekursiv formel. I en rekursiv formel används värden från tidigare figurer för att göra beräkningar för den nya figuren.

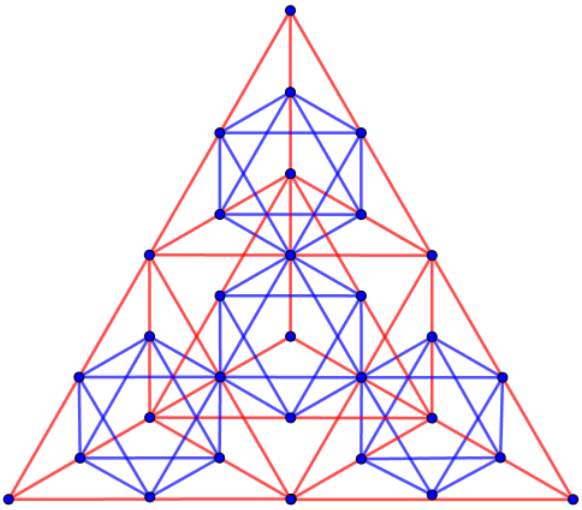
$b = 2 \cdot \left(\frac{b_{n-1}}{2} + 3 \cdot \left(\frac{b_{n-1}}{2}\right)\right) = 4b_{n-1}$

Metod Diamanter

I tetraedrarna hittar vi diamanter som består av 12 pinnar. I figurerna nedan är diamanterna markerade blått. Vi skapar figur 2 och ser att det finns en diamant i den. Vi bygger ut figur 2 till figur 3 genom att lägga till 3 stycken figur 2, då finns det 4 diamanter i figur 3. Det betyder att antalet diamanter i nästa figur är 4 gånger fler.


Figur 1


Figur 2


Figur 3

n	Antal pinnar i diamanter	b
1	0	6
2	$12 \cdot 1 = 12 \cdot 4^0 = 12$	$24 = 12 \cdot 2$
3	$12 \cdot 4 = 12 \cdot 4^1 = 48$	$96 = 48 \cdot 2$
4	$12 \cdot 16 = 12 \cdot 4^2 = 192$	$384 = 192 \cdot 2$

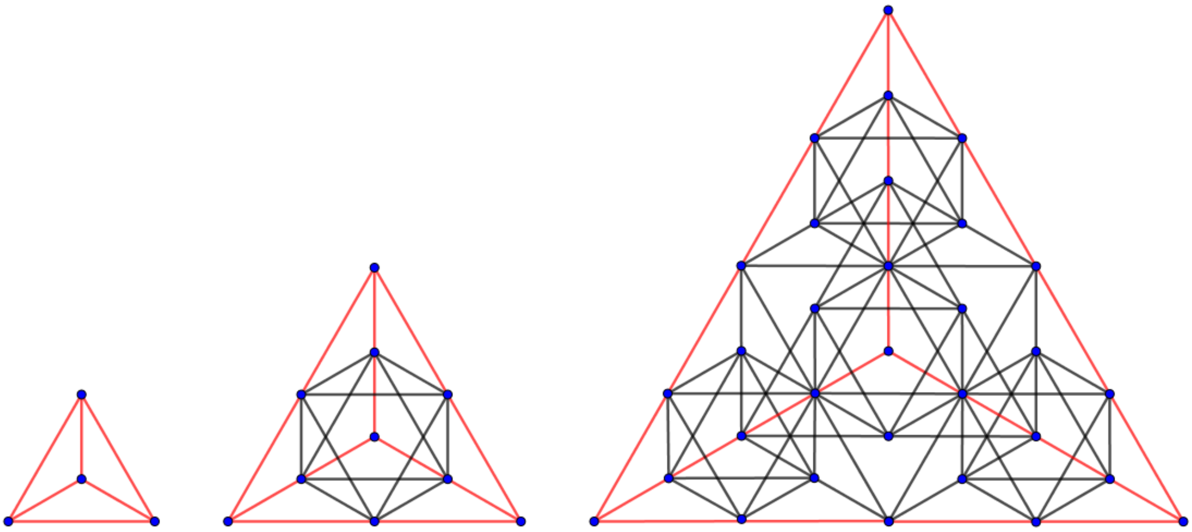
Vi studerar tabellen och märker att diamanterna utgör hälften av alla pinnar i figuren. Utifrån det skapar vi en formel för antalet pinnar i figur *n*. Vi vill veta om det är samma formel som i Minitetraedrar, men vi vet inte hur vi ska ta reda på det. Anna lär oss potensreglerna och med hjälp av dem förenklar vi formeln.

$b = 12 \cdot 4^{n-2} \cdot 2 = 6 \cdot 4^{n-2} \cdot 2 \cdot 2 = 6 \cdot 4^{n-1}$

Det blir samma formel!

Metod Andel

När vi räknar pinnarna på de rödmarkerade kanterna bestämmer vi vilken andel de utgör av det totala antalet pinnar i figuren.



Figur 1 Figur 2 Figur 3

I figur 1 finns det 6 röda pinnar som utgör figurens totala antal pinnar.

I figur 2 finns det 12 röda pinnar och totalt 24 pinnar i figuren, då är andelen $\frac{1}{2}$.

I figur 3 finns det 24 röda pinnar och totalt 96 pinnar i figuren, då är andelen $\frac{1}{4}$.

Antalet röda pinnar dubbleras från figur till nästa figur.

n	Röda pinnar	Andel röda pinnar	b
1	6	1	6
2	$6 \cdot 2 = 12$	$\frac{1}{2}$	$12 \cdot 2 = 24$
3	$6 \cdot 2^2 = 24$	$\frac{1}{2^2}$	$24 \cdot 2^2 = 96$
4	$6 \cdot 2^3 = 48$	$\frac{1}{2^3}$	$48 \cdot 2^3 = 384$
n	$6 \cdot 2^{n-1}$	$\frac{1}{2^{n-1}}$	$6 \cdot 2^{n-1} \cdot 2^{n-1}$

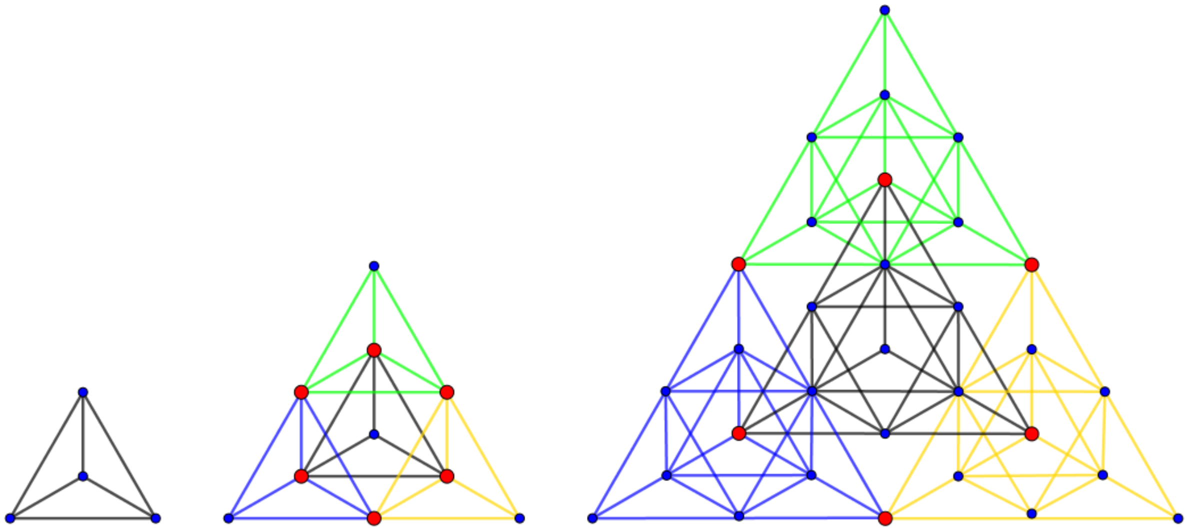
Vi lär oss mer om potensregler och förenklar formeln:

$b = 6 \cdot 2^{n-1} \cdot 2^{n-1} = 6 \cdot (2 \cdot 2)^{n-1} = 6 \cdot 4^{n-1}$

Kulor

Metod Kontaktpunkter

Vår första tanke kring kulor liknar *Minitetraedrar*. Vi tar antalet kulor i den föregående figuren och multiplicerar med 4 eftersom t.ex. figur 3 består av 4 stycken figur 2. Vi subtraherar 6 kulor för när vi bygger nästa figur finns det 6 stycken kontaktpunkter, som är hörnen på de 4 figurerna vi sätter ihop.



Figur 1 Figur 2 Figur 3

De röda kulorna är kontaktpunkter, alltså där två kulor möts och ”slås ihop” till en.

n	Antal kulor i föregående figur multiplicerat med 4	a
1		4
2	$4 \cdot 4 = 16$	$16 - 6 = 10$
3	$10 \cdot 4 = 40$	$40 - 6 = 34$
4	$34 \cdot 4 = 136$	$136 - 6 = 130$

Många av oss tänkte på detta sätt, men det ledde inte till något generellt samband.

Metod Rekursiv

Vi gör en tabell och studerar antalet kulor. Utifrån den ser vi ett intressant samband: antalet kulor i en figur är lika många som summan av kulor och pinnar i föregående figur, t.ex. 4 kulor och 6 pinnar från figur 1 ger totalt 10 kulor i figur 2.

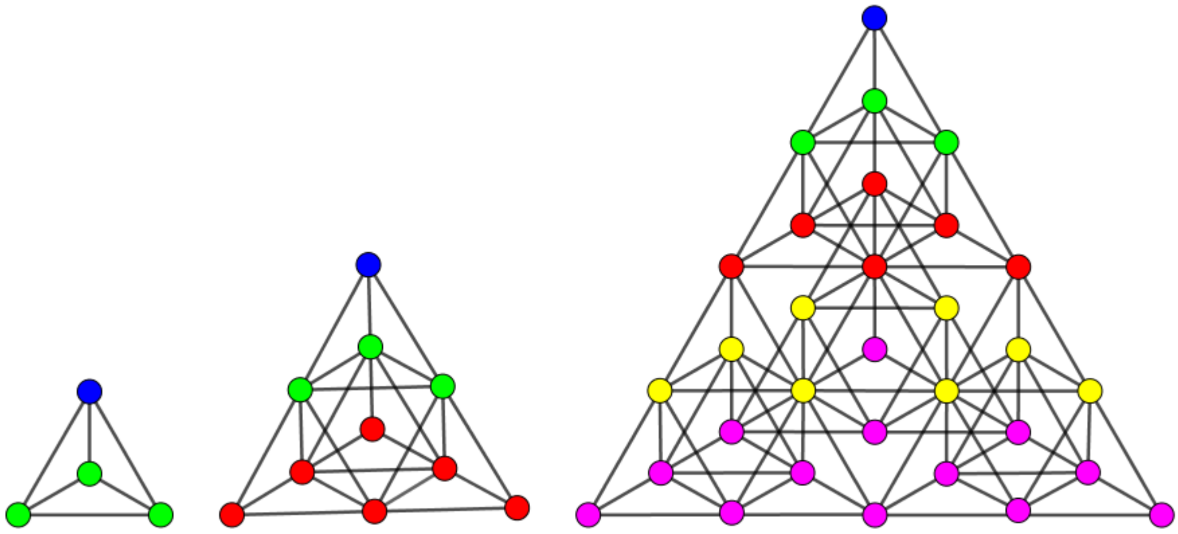
n	*a*	*b*
1	**4**	**6**
2	$\mathbf{10} = 4 + 6$	**24**
3	$\mathbf{34} = 10 + 24$	**96**
4	$\mathbf{130} = 34 + 96$	**384**

De rekursiva formlerna för sambandet:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n = 4b_{n-1} \end{cases}$$

Metod Kulor i lager

Idén föds att vi kan se på kulorna i lager. I figur 1 finns två lager: 1 kula på toppen och 3 kulor i botten. I figur 2 finns det tre lager: 1 kula på toppen, 3 kulor på andra lagret och 6 kulor i botten. Nu studsar alla till, har vi hittat triangeltal?!



Figur 1 Figur 2 Figur 3

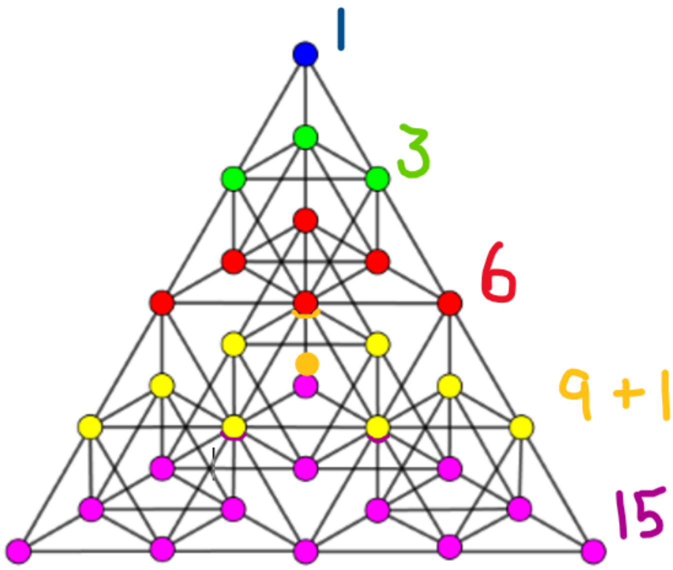
Dessa heliga tal har Anna tränat oss att leta efter länge. Vi är numera alltid öppna för att söka efter triangeltal i alla mönster vi ser. Det var spännande ett tag, men efter att vi byggt figur 3 dör vår glädje. Det visar sig att vårt triangeltalsfynd är en lögn. Det fjärde lagret i figur 3 har nämligen bara 9 kulor, i stället för 10 som är det 4:e triangeltalet.

n	Antal lager	Antal kulor/lager
1	2	$4 = 1 + 3$
2	3	$10 = 1 + 3 + 6$
3	5	$34 = 1 + 3 + 6 + 9 + 15$

Vi fortsätter att använda lageridén som utgångspunkt och hittar ett antal samband:

- Antalet kulor i varje lager ingår i 3:ans multiplikationstabell (förutom 1, som är kulan på toppen).
- Antal lager som tillkommer till en figur är ett mindre än antalet lager i den föregående figuren.

Vi väljer att inte utveckla dessa samband då vi vill fokusera på triangeltal. Istället fyller vi med vår fantasi i hålrummen i mitten som bildas i alla figurer från och med figur 3.



Figur 3

På bilden har vi lagt till en kula i mitten, vilket bildar triangeltal när denna adderas till lagret.

För att kunna avsluta denna metod behöver vi hitta ett samband mellan lagrets nummer och hur många kulor som i teorin ska läggas till i varje lagers hålrum för att bilda triangeltal.

Tyvärr räcker inte vår kunskap eller vår tid till att slutföra denna metod. Vi vill ändå redovisa det vi har kommit fram till.

Metod Skillnader

Vi undersöker hur många fler pinnar det finns än kulor:

n	a	b	$b-a$
1	4	6	$2 = 4^1 - 2$
2	10	24	$14 = 4^2 - 2$
3	34	96	$62 = 4^3 - 2$
4	130	384	$254 = 4^4 - 2$

Vi märker att skillnaden mellan antalet pinnar och antalet kulor är:

$4^n - 2$

Ovanstående utryck tillsammans med uttrycket för antalet pinnar från *Minitetraedrar*

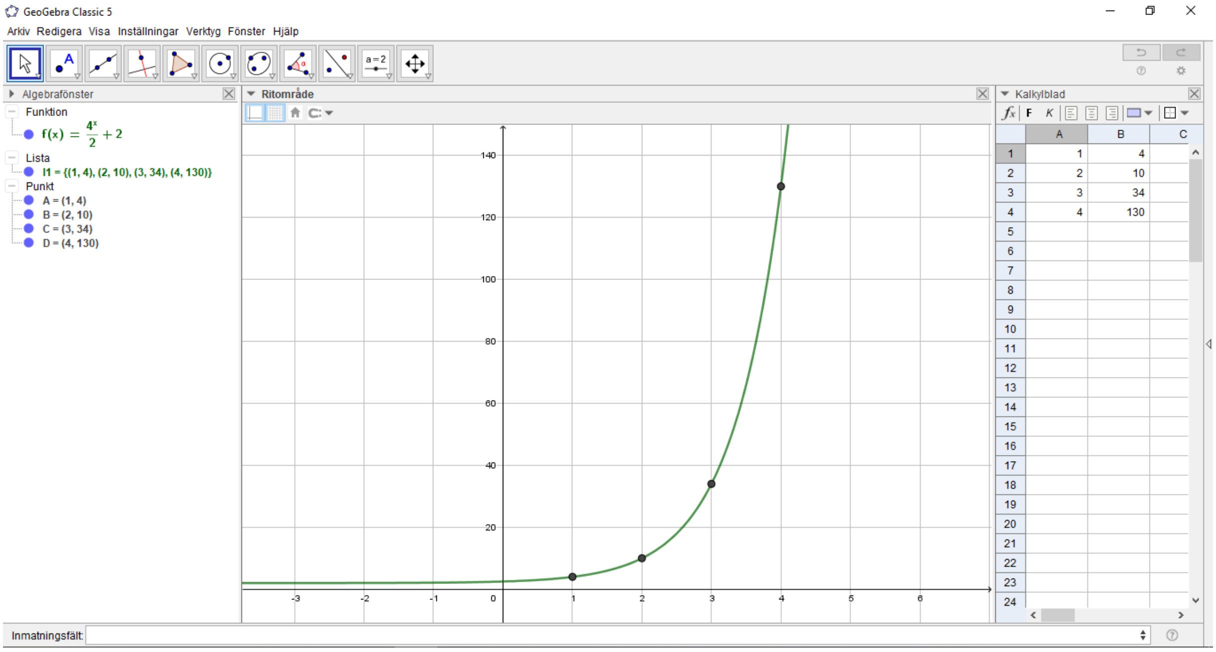
$6 \cdot 4^{n-1}$

ger formeln för antalet kulor i figuren:

$$a = 6 \cdot 4^{n-1} - (4^n - 2) = 6 \cdot 4^{n-1} - 4^n + 2 = 1{,}5 \cdot 4^n - 4^n + 2 = \frac{4^n}{2} + 2$$

Formeln är en sluten formel som vi kan använda för att beräkna antalet kulor i vilken figur som helst utan att beräkna antalet kulor i föregående figurer.

Vi är inte helt säkra på att formeln stämmer så vi använder Geogebra för att kontrollera den. Vi skapar en tabell med figurens nummer och antalet kulor i Geogebra. Sedan infogar vi punkterna i koordinatsystemet och skriver in formeln i inmatningsfältet. Grafen går igenom alla punkter vilket visar att formeln stämmer.



Resultatet bekräftade formeln, den fungerar! Vi blir riktigt glada över detta, och sättet grafen drastiskt drog i väg efter figur 3 är överraskande. Vi vet att hur många Geomags vi än har köpt så är det inte tillräckligt för att bygga figur 4, speciellt inte figur 5, men vi var fortfarande inte beredda på hur grafen skulle se ut. Anna berättar att detta samband är ett exponentiellt samband.

Efter allt slit med att hitta en fungerande formel som inte är rekursiv blir vi lättade eftersom vi äntligen har lyckats!

Jämförelse och reflektion

Jämförelse – Pinnar

Vi använder 4 metoder:

- I *Minitetraedrar* räknar vi hur många små tetraedrar figuren består av.
- I *Pinnar i lager* räknar vi de horisontella och de vinklade pinnarna.
- I *Diamanter* studerar vi antalet diamanter i varje figur.
- I *Andel* räknar vi hur stor andel pinnarna på kanterna utgör.

Minitetraedrar och *Pinnar i lager* kan liknas då föregående figur används för att beräkna nästa. Olikheten är att vi i *Minitetraedrar* tänker att en figur består av 4 stycken föregående figurer, i *Pinnar i lager* tänker vi att vi redan har en och att det tillkommer 3 figurer. Metoderna är lika och *Pinnar i lager* kan ses som en omväg till *Minitetraedrar*.

Diamanter och *Andel* liknar varandra till tankesättet. Vi bestämmer hur stor andel en del av figuren utgör. Skillnaden är att vi delar in figurerna på olika sätt.

En likhet mellan alla metoder är att en andel av figuren bestäms för att beräkna hur många de övriga pinnarna är. I *Pinnar i lager* och *Andel* varierar andelen i storlek som beror på figurens nummer. I *Minitetraedrar* och *Diamanter* är delarnas storlekar konstanta.

Den enklaste metoden är *Minitetraedrar*. Med det menar vi att formeln till sambandet var enklast att hitta och förstå då den inte kräver många steg.

Jämförelse – Kulor

Vi använder 4 metoder:

- I *Kontaktpunkter* tar vi bort kulor från kontaktpunkterna när vi bygger nästa figur.
- I *Rekursiv* adderar vi antalet pinnar och kulor från föregående figur.
- *Kulor i lager* går ut på att hitta triangeltal.
- I *Skillnader* undersöker vi skillnaden mellan antalet kulor och pinnar.

I både *Rekursiv* och *Skillnader* använder vi antalet pinnar för att beräkna antalet kulor. I *Rekursiv* används antalet pinnar från föregående figur, medan i *Skillnader* beräknas differensen mellan antalet pinnar och kulor. En till olikhet är att *Rekursiv* är ett rekursivt tankesätt och *Skillnader* ger en sluten formel. Även *Kontaktpunkter* är en rekursiv metod, men till skillnad från de andra används bara kulorna i föregående figur.

Kulor i lager skiljer sig på flera sätt från de andra metoderna. För det första, beror det på att vi inte hittade något samband och för det andra, beror det på att man måste använda sin fantasi.

Den metod som vi tycker är enklast att förstå är *Rekursiv*, eftersom man snabbt kan räkna ut antalet kulor om man vet antalet kulor samt pinnar i föregående figur. Däremot är *Skillnader* mer effektiv då man kan räkna ut antalet kulor utan att behöva veta något om tidigare figurer.

Sammanfattning

Ända sedan sjätte klass har vår lärare Anna uppmuntrat och tränat oss inför Sigma8 som om det vore OS. När vi till slut fick delta i tävlingen, förstod vi Annas entusiasm.

Uppgiften vi fick var utmanande och intressant vilket drev oss att jobba hårt. I början jobbade vi med tetraedrar i mindre grupper för att få olika perspektiv. När grunden för projektet var lagd fördjupade vi oss mer i figuren och dess samband. Vi fick ett värdefullt besök av matematikern Johan Thorbjörnson från KTH. Han inspirerade och lärde oss om fraktaler och rekursiva formler.

Efter många tidiga morgnar, pizzaluncher och sena kvällar har vi hittat flera funktionella lösningar, som alla har sina för- och nackdelar. Anna och Johan har hjälpt oss att se problemet inte bara som en geometrisk figur utan också som en del av något större. Genom att bolla tankar och idéer har vi utvecklat våra matematiska kunskaper, särskilt inom algebra. Vi har även utvecklat vår samarbetsförmåga och insett att projektarbete inte nödvändigtvis innebär att alla ska jobba med en och samma sak. Ju fler som behövde komma överens, desto längre tid tog det. Hur som helst har alla bidragit och resultatet var mödan värt.

Källförteckning

Böcker:

- Christer Kiselman, Lars Mouwitz (2008). *Matematiktermer för skolan.* Göteborg: Livréna AB.
- Lena Alfredsson, Kajsa Bråting, Patrik Erixon och Hans Heikne (2011). *Matematik 5000.* Stockholm: Natur och kultur.

Hemsidor:

- https://www.wolframalpha.com/
- https://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_growth
- https://www.dcode.fr/function-equation-finder

Personer:

- Johan Thorbjörnson
- Eeva Klintfors
- Thyra Kvarnström
- Agnes Anrell

Foto:

- Albin Person
- Emma Cranning
- Elias Galmén
- Edvin Lundh