2021/2022

Fördjupningsuppgift

TETRAEDER

Matte 8:4

Uppsala Musikklasser

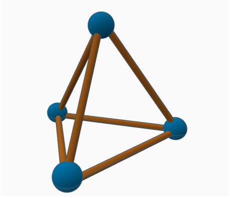
Sverige

NMCC Sigma 8

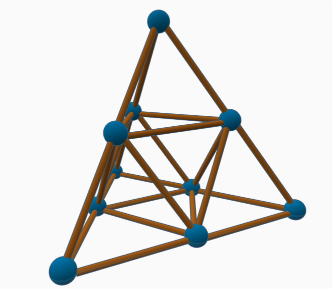
Innehållsförteckning

Inledning

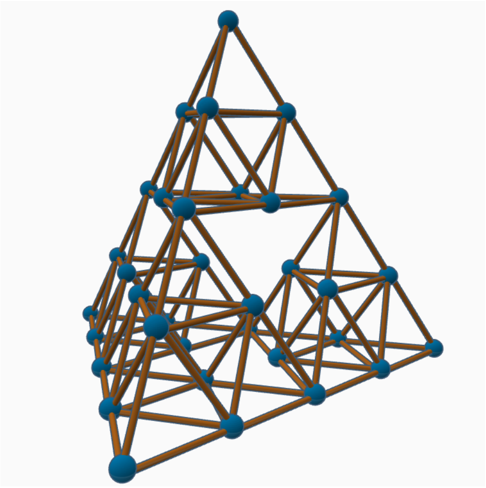
Årets fördjupningsuppgift i Sigma 8 handlar om tetraeder i ett växande mönster. En tetraeder består av fyra liksidiga trianglar där tre sidor möts i varje hörn. Den här uppgiftens tetraeder byggs upp av kulor och pinnar. Kulorna i *Figur 1* sitter i tetraederns 4 hörn och pinnarna binder samman kulorna med varandra. Från och med *Figur 2* används fyra av den tidigare tetraedern i följden för att bygga en ny, större tetraeder . Uppgiften går ut på att undersöka mängden kulor och pinnar i de olika figurerna. Vi illustrerar med en bild för att förtydliga:



Figur 1



Figur 2



Figur 3

Vi delade upp oss i grupper på tre eller fyra personer. Grupperna arbetade sedan med uppgiften, oberoende av varandra, med att komma på olika mönster eller upprepningar i följden. Därmed fick vi även olika metoder för att lösa uppgiften. I den här rapporten har vi sammanställt dessa olika metoder och försökt redovisa dem på ett tydligt sätt.

Genom hela rapporten använder vi variabeln n för figurens nummer.

Antal pinnar

Metod 1

För att få en tydlig struktur, inledde vi arbetet med att räkna antalet pinnar i de tre första figurerna. Vi förde sedan in talen i en tabell:

Figur nummer, (n)	Antal pinnar
1	6
2	24
3	96

Vi märkte snabbt att antalet pinnar följde ett tydligt mönster. Antalet pinnar fyrdubblades för varje ny figur.

$6 \cdot 4 = 24$

$24 \cdot 4 = 96 \longrightarrow 6 \cdot 4 \cdot 4 = 96$

$96 \cdot 4 = 384 \longrightarrow 6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 384$

Med hjälp av detta mönster kunde vi enkelt beräkna antalet pinnar i figur 4, 5 osv. Vi förde in resultatet i tabellen:

Figur nummer, (*n*)	Antal pinnar
1	6
2	24
3	96
4	384
5	1 536
10	1 572 864

Vi kunde nu beräkna antalet pinnar för varje figur genom att multiplicera den föregående figurens antal med 4.

Figur 1: $6 = 6$

Figur 2: $24 = 6 \cdot 4$

Figur 3: $96 = 6 \cdot 4 \cdot 4$

Figur 4: $384 = 6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

Eftersom siffran 6 finns med i alla ekvationer, kan vi förenkla uttrycken genom att dela båda led med 6. Resultatet blir följande:

Figur 1: $6/6 = 1$

Figur 2: $24/6 = 4$

Figur 3: $96/6 = 4 \cdot 4$

Figur 4: $384 / 6 = 4 \cdot 4 \cdot 4$

Vi såg på höger led att talen kunde skrivas som potenser med 4 i basen:

$1 = 4^0$

$4 = 4^1$

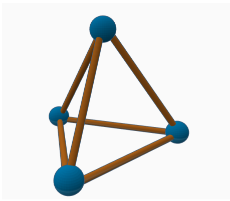
$4 \cdot 4 = 4^2$

$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$

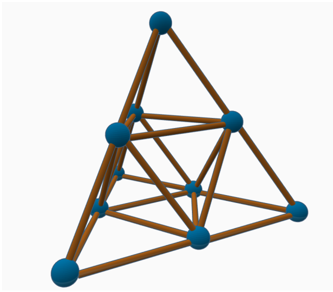
Som vi kan se ökar exponenten med 1 för varje figur. Det enda som skiljer de olika potenserna åt är exponenten. Vi ser att exponenten är lika med (n - 1).

Alla dessa beräkningar resulterar i formeln:
$6 \cdot 4^{n-1}$

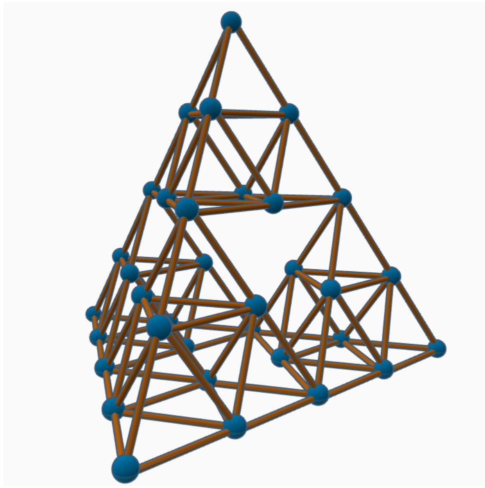
Metod 2



Figur 1



Figur 2



Figur 3

För följande metod valde vi att bortse från alla siffror och istället koncentrera oss på ovanstående bilder. Det blir direkt tydligt att strukturen av de olika figurerna följer ett mönster. Vi ser att *figur 2* byggs upp av fyra tetraeder, likadana som *figur 1*. I *figur 3* kan man på samma sätt urskilja fyra tetraeder, likadana som *figur 2*. Vi kan därmed beräkna antalet pinnar i en figur genom att multiplicera antalet pinnar i den närmast föregående figuren med fyra.

Figur 1 = 6

Figur 2 = $6 \cdot 4$

Figur 3 = $6 \cdot 4 \cdot 4$

Figur 4 = $6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

Resultatet av denna metod är detsamma som i "*Metod 1*" (sid. 3-5) och leder oss därför till samma formel:

$\mathbf{6 \cdot 4^{n-1}}$

Antal Kulor

Beräkningen av antalet kulor var den delen av uppgiften där vi stötte på mest problem. Medan antalet pinnar följde ett tydligt mönster var det mycket svårare att hitta samband när det gällde kulor. I början av arbetet lyckades vi framställa en formel som verkade stämma, men efter granskning upptäckte vi att den var baserad på felaktiga värden vilket innebar att den inte stämde. Vi var därmed tillbaka på ruta ett.
Trots denna miss hittade vi två olika lösningar som vi presenterar här.

Metod 1

Vi började återigen med att räkna antalet kulor i de tre första figurerna och förde in talen i tabellen:

Figur nummer, (*n*)	Antal pinnar	Antal kulor
1	6	4
2	24	10
3	96	34

Under en lektion, då hela klassen arbetade med uppgiften, hittade vi ett samband mellan antalet pinnar och antalet kulor. Vi såg att antalet pinnar i en figur dividerat med tre blev ungefär antalet kulor i samma figur. Genom att testa oss fram därifrån kom vi fram till att man behöver addera två till tredjedelen för att få antalet kulor.

Antalet pinnar:
$6 \cdot 4^{(n-1)}$
Antalet kulor:
$(6 \cdot 4^{(n-1)} / 3) + 2$
Förenklad formel:
$\mathbf{2 \cdot 4^{(n-1)} + 2}$

Prövning av formel:
Figur 1: $2 \cdot 4^{(1-1)} + 2 = 2 \cdot 4^0 + 2 = 2 \cdot 1 + 2 = 4$
Figur 2: $2 \cdot 4^{(2-1)} + 2 = 2 \cdot 4^1 + 2 = 2 \cdot 4 + 2 = 10$
Figur 3: $2 \cdot 4^{(3-1)} + 2 = 2 \cdot 4^2 + 2 = 2 \cdot 16 + 2 = 34$

Metod 2

Figur nummer, (n)	Antal pinnar	Antal kulor
1	6	4
2	24	10
3	96	34
4	384	130
5	1 536	514

När tabellen ovan ritades upp, var det många som såg ett samband. Vi noterade att antal pinnar på *figur 1* adderat med antal kulor på *figur 1*, tillsammans blir antal kulor i *figur 2*. Sambandet gällde även för de övriga figurerna, antalet kulor för en figur var lika med antalet pinnar och kulor i den föregående figuren tillsammans.
Exempel:

Figur 1: antal pinnar = 6, antal kulor = 4
$4 + 6 = 10 =$ antal kulor i *figur 2*
Figur 2: antal pinnar = 24, antal kulor = 10
$24 + 10 = 34 =$ antal kulor i *figur 3*

För att ta reda på antalet kulor i *figur n* behöver vi veta antalet i den föregående figuren. Som tur är har vi redan tagit fram en formel för antal kulor (se "*Metod 1*" sid. 7) i *figur n,* och med hjälp av den kan vi testa hur detta samband skulle se ut i en formel.

Enligt formeln för pinnar tidigare framtagen (se "*Metod 1*" sid. 3 - 5):
Antal pinnar i den *närmast föregående* figuren: $6 \cdot 4^{(n-1)-1}$

Enligt formeln för kulor tidigare framtagen (se "*Metod 1*" sid. 7):
Antal kulor i den *närmast föregående* figuren: $2 \cdot 4^{(n-1)-1} + 2$

Formeln för antal kulor i *figur n* blir därmed: $(6 \cdot 4^{(n-1)-1}) + (2 \cdot 4^{(n-1)-1} + 2)$
Förenklad formel: $8 \cdot 4^{n-2}+2$

Prövning av formel:

Figur 1: $8 \cdot 4^{1-2}+2 = 8 \cdot 4^{-1}+2$

När det gäller potenser med negativ exponent går vi enligt regeln att "$x^{-y} = 1/x^{y}$"

I det här fallet kan vi alltså ersätta "4^{-1}" med $1/ 4^{1} = 1/ 4 = 0.25$

Alltså:

Figur 1: $8 \cdot 4^{-1} + 2 = 8 \cdot 0.25 + 2 = 2 + 2 = 4$

Figur 2: $8 \cdot 4^{2-2} + 2 = 8 \cdot 4^{0} + 2 = 8 \cdot 1 + 2 = 10$

Figur 3: $8 \cdot 4^{3-2} + 2 = 8 \cdot 4^{1} + 2 = 8 \cdot 4 + 2 = 34$

Figur 4: $8 \cdot 4^{4-2} + 2 = 8 \cdot 4^{2} + 2 = 8 \cdot 16 + 2 = 130$

Prövningen har visat att sambandet och formeln fungerar för att beräkna antal kulor.

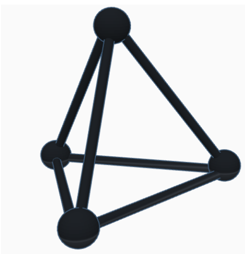
$8 \cdot 4^{n-2} + 2$

Förenklad formel:

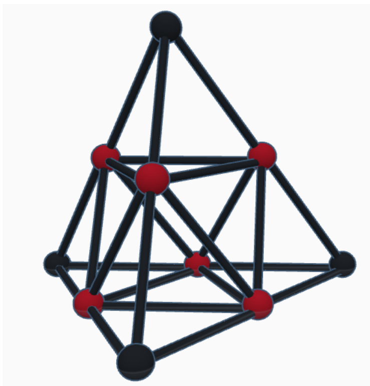
$\mathbf{2 \cdot 4^{n-1} + 2}$

Mönster

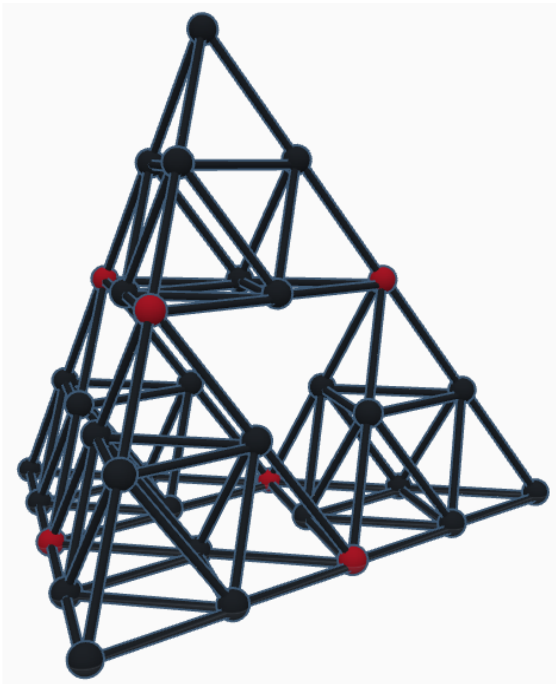
Antalet pinnar följde ett tydligt mönster som gick att hitta endast genom att se på bilderna av de olika figurerna. Där såg man att *figur 2* byggdes upp av fyra tetraeder, likadana som den i *figur 1*. I *figur 3* kunde man på samma sätt urskilja fyra tetraeder, likadana som den i *figur 2*. På det här sättet fortgick mönstret och vi kunde därmed beräkna antalet pinnar i en tetraeder genom att multiplicera antalet pinnar i den närmast föregående figuren med fyra. När det kommer till kulor blir det dock lite mer komplicerat.



Figur 1



Figur 2



Figur 3

Bilderna ovan visar sambandet som nyss förklarades. Men om vi skulle testa att multiplicera antalet kulor i *figur 1* med fyra kommer inte produkten att stämma överens med antalet kulor i *figur 2*. Det beror på att vissa av kulorna som räknas in i den ursprungliga tetraedern (*figur 1)* delas med andra tetraeder i *figur 2*. Dessa kulor markeras i bilderna med röd färg och är sex stycken. Eftersom de rödmarkerade kulorna delas med *en* annan tetraeder kan vi subtrahera sex från totalen. I slutändan får vi alltså följande:

Antal kulor *figur 2* = (antal kulor *figur 1)* · 4 - 6

Antal kulor *figur 3* = (antal kulor *figur 2)* · 4 - 6

Antal kulor *figur 4* = (antal kulor *figur 3)* · 4 - 6

Eftersom vi vet att antal kulor i *figur 1 = 4* kan vi även skriva formeln i siffror:

Antal kulor *figur 2* = $4 \cdot 4 - 6$

Antal kulor *figur 3* = $(4 \cdot 4 - 6) \cdot 4 - 6$

Antal kulor *figur 4* = $((4 \cdot 4 - 6) \cdot 4 - 6) \cdot 4 - 6$

Vi har hittat ett tydligt mönster, dock utan att lyckas koppla detta till figurens nummer.

Analys

Vi har valt att dela upp analysen i två delar; en för pinnar och en för kulor. Vi går igenom och jämför kort de olika metoder vi har använt.

Antal pinnar

Metod 1 är enligt oss en väl strukturerad metod, det var tydligt och lätt att följa med i resonemangen. Metoden är helt enkelt baserad på siffror och vi kom fram till svaret genom en ekvation vilket gör detta till en mycket säker metod. Nackdelen med *Metod 1* är om något att den är längre än de övriga metoderna och sker i många led.

Metod 2 baseras på figurernas struktur rent utseendemässigt vilket ger ett något mer chansartat resultat än en ekvation. Metoden är däremot effektivare på så sätt att vi kan dra samma slutsats som i *Metod 1* fast mycket snabbare.

Av dessa två metoder föredrar vi *Metod 1* då den har det säkraste tillvägagångssättet.

Antal kulor

Metod 1 upptäcktes av en slump cirka en vecka innan inlämningsdatumet för rapporten, då vi hade slösat tid på en felaktig lösning. Den nya metoden var enkel att följa och välstrukturerad, och visade sig efter en prövning vara korrekt. Vi anser att lösningen är effektiv, men att den inte skulle hittats utan kunskapen om antal pinnar.

Metod 2 är en lösning som bygger på *Metod 1*. Att kalla den för en egen metod är vore därför inkorrekt, men det är fortfarande ett eget mönster. Formeln vi fick i slutändan var hursomhelst korrekt även om den är mycket lik *Metod 1.*

Mönstret var lätt att hitta men tar mycket lång tid att använda då vi inte har en formel som anpassas till variabel n. En formel är extremt svår att hitta eftersom den blir längre för varje figur utan möjlighet att förenkla med matematiskt språk.

Vi anser att *Metod 1* är mer självständig även om *Metod 2* visar ett tydligare samband.

Sammanfattning

Efter mycket slit och intensiv matteräkning är vi äntligen färdiga med uppgiften, men vägen dit var inte lätt.

I början av arbetet var hela gruppen mycket entusiastisk. Vårt lyckade resultat på inträdesprovet hade gett oss glädje och motivation att arbeta vidare med fördjupningsuppgiften. Vi inledde alltså arbetet i ett tillstånd av mild hybris, men snart skulle skulle vi tvingas ner på marken igen.

Vi tog tag i beräkningen av antalet pinnar, vilket skulle visa sig vara den lättare delen. Det tog inte lång tid förrän vi hade hittat ett flertal samband som sedan ledde till formler. Det var först när vi började räkna på antalet kulor som vi stötte på problem.

I ett tidigt skede hade vi framställt det som vi då trodde var en korrekt lösning. I själva verket var lösningen baserad på felaktiga värden, vilket innebar att formeln inte stämde. Denna händelse minskade gruppens självförtroende och påverkade även den allmänna stämningen framöver. Och även om matematikdelen av det hela inte var lätt, så var det kanske en ännu större utmaning att arbeta i grupp. Klassen upptäckte under det här projektet att skillnaderna mellan ett enskilt arbete och ett grupparbete är stora och att kommunikation mellan lagdelarna är mycket viktigt.

Vad har vi då lärt oss av att arbeta med den här uppgiften? Jo, till och börja med har vi utvecklats i vårt tankesätt inom problemlösning. Vi har lärt oss att vrida och vända på alla tankar för att lyckas hitta användbara samband och metoder. Uppgiften har även lett till funderingar kring fraktaler och den geometriska formen tetraeder. Men utöver mattekunskaper har uppgiften dessutom tvingat oss att arbeta i grupp, vilket i sin tur har utvecklat en hel del nya förmågor, bland annat att förmedla våra matematiska tankar i ord till andra klasskamrater.

Det kan låta som att uppgiften endast innebar bråk och elände, men så var det verkligen inte. Uppgiften var en rolig och lärorik utmaning för oss och i slutändan är vi alla mycket nöjda med resultatet!