Sigma 8:

NMCC: Fördjupningsuppgift Tetraeder 2021–2022

Minervaskolan – Klass 8D

2022 Sverige

Innehållsförteckning

Hur klassen har arbetat med uppgiften

Vi är en klass på 24 elever från Minervaskolan i Umeå och vi tycker om matte. Alla i klassen hade en positiv inställning och alla var aktiva på problemet. Årets fördjupningsuppgift handlar om tetraeder och fraktaler. Vi har jobbat på följande vis:

Klassen började med att försöka hitta en formel. För att komma fram till antalet pinnar och kulor i de första figurerna använde vi oss av geomag (magnetiska pinnar och kulor), vilket gjorde att vi kunde bygga ihop de första figurerna. Under tiden så delade vi med oss om nya upptäckter om uppgiften inom klassen så att alla var på samma plan. När vi hade listat ut formlerna som krävdes för att lösa uppgiften så delades det med hela klassen och sedan delades klassen in i olika grupper, som alla hade olika uppgifter. Vissa kom på fler formler, andra letade reda på fakta om fraktaler, en liten grupp planerade planschen och några började programmera egna fraktaler.

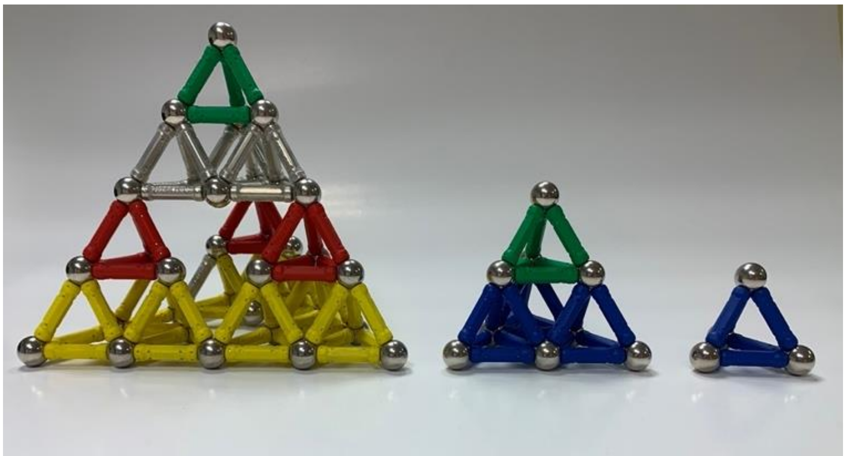
Under tiden så delades alla idéer och tankar samt att man i slutet av varje lektion samlades och sammanfattade lektionens upptäckter. Alla i klassen hade en positiv inställning och alla var aktiva på problemet.

Vi har lärt oss mycket om fraktaler som tex hur de är uppbyggda och hur man skapar en egen fraktal. Vi har även lärt oss att det finns både tvådimensionella och tredimensionella fraktaler. Vi har framför allt lärt oss att samarbeta inom hela klassen.

Formel för antalet pinnar

Det första vi gjorde var att jämföra antalet tetraeder i de tre första figurerna för att försöka hitta ett mönster. Mönstret vi fann var med undantag från den första figuren, att man multiplicerar antalet tetraeder med fyra för att få fram figuren efter. Figur tre har alltså fyra gånger så många tetraedrar som figur två, vilket gör att mönstret blir:

Figurnummer	Antalet Tetraeder	Antal pinnar
1	1	6
2	4	24
3	16	96
4	64	384
5	256	1536



För att komma fram till antalet tetraeder i nästa figur multiplicerande vi med fyra. Genom att göra detta kom vi även fram till antalet pinnar i figur 4 och 5 (64 pinnar för figur 4 och 256 pinnar för figur 5).

Med vetskapen om att vi kunde multiplicera med fyra för att komma fram till antalet tetraeder i nästa figur så kom vi fram till formeln 4^n (hur många tetraedrar föregående figur innehöll), där n är figurnummret. När vi testade denna formel så blev resultaten antal tetraeder i nästa figur.

Eftersom vi fick svaret på figuren före vi ville räkna ut, dvs. att vi låg ett steg för långt fram så försökte vi finna svaret på föregående figur genom att backa formeln ett steg. Detta är anledningen till att vi tog formeln $4^{(n-1)}$. Eftersom varje tetraeder består av 6 pinnar så multiplicerade vi formeln med 6. Den fullständiga formeln för antalet pinnar i figur n blev då

$$4^{(n-1)} \cdot 6 = p$$

Formel för antal kulor:

$$\frac{4^n}{2} + 2 = a$$

I denna formel står "n" för figurnumret och "a" för antal kulor.

Vi kom fram till formeln för antalet kulor genom att undersöka formeln för antalet pinnar:

$$4^{(n-1)} \cdot 6$$

Denna tabell skapade vi med hjälp av ett program på datorn där man kunde rita upp denna fraktal och räkna antal kulor samt med hjälp av geomag för att kunna skapa de första figurerna.

Figurnummer	Antalet tetraeder	Antalet kulor
1	1	4
2	4	10
3	16	34
4	64	130
5	256	514

Vi testade formeln $4^{(n-1)} \times 6$ som fungerade för antalet pinnar och provade använda den för antalet kulor. Svaret vi fick fram stämde inte överens med rätt antal kulor. Antalet kulor vi fick fram från formeln var för mycket än det korrekta antalet kulor. Då provade vi att multiplicera med 4 istället för 6 för att få fram ett mindre antal kulor.

Antalet kulor var mindre än vad formeln gav så därefter testade vi att multiplicera med 4 i stället för 6 för att få fram ett mindre antal kulor. Då såg formeln ut såhär:

$$4^{(n-1)} \cdot 4$$

Det svar vi fick fram från denna formel, jämförde vi med det korrekta antalet kulor och insåg att formeln gav ungefär dubbelt så mycket än vad som var rätta svaret. Vi provade a5tt dividera med 2 men det blev inte riktigt rätt svar. Vi prövade att addera olika tal innan vi dividerade med 2. Vi insåg då att om vi först adderade 4 och sedan dividerade med 2 fick vi rätt antal kulor från formeln. Då såg formeln ut såhär:

$$\frac{\left(4^{(n-1)} \cdot 4 + 4\right)}{2} = a$$

Vi testade denna formel med flera olika figurnummer och den funkade varje gång.

Formeln som vi hade fått fram insåg vi kunde förenklas väldigt långt. Det första vi förenklade var med hjälp av räkne reglerna för potenser med samma baser. $a^x \cdot a^y = a^{n+k}$

Om ett tal inte redan har någon potens så betyder det att det är upphöjt med 1 och i detta fall motsvarar $4 = 4^1$

På så sätt kan man se att:

$$4^{n-1} \cdot 4$$

Är samma sak som:

$$4^{n-1} \cdot 4^1$$

Sedan kan man förkorta det med hjälp av räknereglerna för potenser med samma baser:

$$4^{n-1} \cdot 4^1 = 4^{n-1+1} = 4^n$$

$4^{n-1} \cdot 4^1 = 4^{n-1+1} = 4^n$ i formeln så såg den då ut såhär:

$$\frac{4^n + 4}{2} = a$$

Om man löser divisionen får man ut formeln:

$$\frac{4^n}{2} + 2 = a$$

Denna formel kan man inte förkorta något mer och det är då den enklaste formen.

Formel för hur antal kulor och antal pinnar förhåller sig till varandra

$$a \cdot 3 - 6 = b$$

$$\frac{b}{3} + 2 = a$$

Där b" står för antalet pinnar och "a" för antal kulor. Vi började med att skriva upp antal pinnar och antal kulor bredvid varandra i en tabell för att kunna jämföra de olika talen lättare.

	Antal kulor	Antal pinnar
Figurnummer 1	4	6
Figurnummer 2	10	24
Figurnummer 3	34	96
Figurnummer 4	130	384
Figurnummer 5	514	1536
Figurnummer 6	2050	6144

När vi gjorde detta insåg vi att antal pinnar var ungefär 3 gånger fler än antal kulor. Vi provade att först multiplicera kulorna med 3 och då fanns det 6 för många kulor för att det skulle fungera. Vi provade flera gånger med att multiplicera antal kulor med 3 och det saknades hela tiden 6. Då kunde vi skapa formeln:

$$a \cdot 3 - 6 = b$$

Om man vill vända på detta uttryck så att man kan få ut antal kulor från antal pinnar måste man första addera 6 till båda sidorna.

$$a \cdot 3 - 6 + 6 = b + 6$$

Detta kan man förenkla till:

$$a \cdot 3 = b + 6$$

Sedan dividerar man båda sidorna med 3. När man dividerar så måste man dividera alla termer i talet och det blir då:

$$a \cdot \frac{3}{3} = \frac{(b+6)}{3}$$

Som vi sedan förenklade till:

$$a = \frac{b}{3} + 2$$

Med dessa formler kan man alltså veta hur pinnar och kulor förhåller sig till varandra.

Formel för antal kulor till figurnumret

$$\frac{Log(2a-4)}{Log(4)} = n$$

I denna uträkning är n = figurnumret och a = antal kulor. Vi kan förenkla uttrycket för antal kulor:

$$\frac{4^n}{2} + 2 = a$$

Genom att först subtrahera 2 på båda sidor:

$$\frac{4^n}{2} + 2 - 2 = a - 2$$

Det är samma sak som:

$$\frac{4^n}{2} = a - 2$$

Sedan multiplicerar man båda sidorna med 2 för att få bort divisionen i vänster led:

$$\frac{4^n}{2} \cdot 2 = 2(a-2)$$

Förenklar vi det uttrycket kan man få fram det nya uttrycket:

$$4^n = 2a - 4.$$

Gruppen som arbetade med denna uppgift märkte att med den kunskap som de hade, kunde de inte lösa denna uppgift. Då fick den gruppen lära sig lite om vad logaritmer är för något och hur man använder det. Gruppen fick lära sig om hur man använder logaritmer för att lösa ut exponenter. $Log(a^b) = b \cdot Log(a)$ Efter det kan man med hjälp av denna nya kunskap om logaritmer, fortsätta sin uträkning för att ta reda på vad figurnumret är med hjälp av antal kulor.

Först börjar man med uttrycket som vi förenklade:

$$4^n = 2a - 4.$$

Detta uttryck kan man därifrån börja använda logaritmer och skriva om det till:$Log(4^n) = Log(2a-4)$

Eftersom vi använder oss av logaritmer kan man skriva om detta uttryck till ett nytt uttryck genom att flytta exponenten “n” framför logaritmen till:

$$n \cdot Log(4) = Log(2a-4)$$

För att fortsätta förenkla detta uttryck ännu mer så kan man då dela båda sidor med Log(4) för att få ut ”n” själv på en av sidorna.

$$\frac{n \cdot Log(4)}{Log(4)} = \frac{Log(2a-4)}{Log(4)}$$

Om man förenklar detta uttryck så får man att:

$$n = \frac{Log(2a-4)}{Log(4)}$$

Detta kan man slå på en miniräknare och får då ut vad figurnumret är om man vet antal kulor.

Formel för antal pinnar till figurnummer

$$n = \frac{Log\left(\frac{b}{6}\right)}{Log(4)} + 1$$

I denna formel står “b” för antalet pinnar.
Vi löste denna formel på ett liknande sätt till hur vi löste formeln för antalet kulor till figurnumret. Vi utgick ifrån formeln för antal pinnar från figurnumret som såg ut såhär:

$$4^{(n-1)} \cdot 6 = b$$

Det första vi gjorde då var att dividera båda led med 6. Då såg formeln ut såhär:

$$4^{(n-1)} = \frac{b}{6}$$

Sedan skriver man om detta uttryck med logaritmer till:

$$Log\left(4^{(n-1)}\right) = Log\left(\frac{b}{6}\right)$$

Sedan flyttar vi exponenten i vänster led till framför logaritmen:

$$(n-1)Log(4) = Log\left(\frac{b}{6}\right)$$

För att sedan få ”(n-1)” ensamt i vänster led så dividerar vi båda leden med $Log(4)$.

$$n - 1 = \frac{Log\left(\frac{b}{6}\right)}{Log(4)}$$

Sedan adderar vi 1 till båda sidorna för att få ut värdet av “n”.

$$n = \frac{Log\left(\frac{b}{6}\right)}{Log(4)} + 1$$

Detta kan man slå på en miniräknare och då få reda på figurnumret om man vet antalet pinnar.