Tetraeder

NMCC

2022, Sverige

Bjärehovskolan, 8C

Innehållsförteckning

Sammanfattning

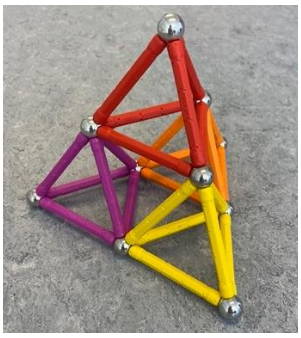
Under ett par veckors tid har hela klassen arbetat med uppgiften tetraeder. Målet har varit att komma på en formel som kan beskriva antalet pinnar och kulor i en önskad figur. Att komma på en formel för antalet kulor var svårt och vi fick verkligen samarbeta i hela klassen för att tillslut komma fram till en lösning. I rapporten står det mer detaljerat vad vi har gjort i klassen, hur vi har arbetat, vilka resurser vi har haft tillgång till och hur vi har nyttjat dem. Vi går även in på problemen vi stött på, hur vi löste uppgiften och vad vi har lärt oss.

Begreppskunskap

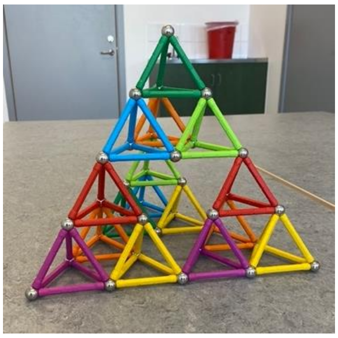
I början av arbetsprocessen fick vi lägga lite tid på att lära oss om aktuella begrepp till arbetet. De två begreppen vi arbetade med var tetraeder och fraktal.

En *tetraeder* är en polyeder som består av fyra trianglar där tre sidoytor möts i varje hörn. En tetraeder har fyra hörn och sex kanter. Tetraedern vi arbetade med i uppgiften var en regelbunden tetraeder vilket innebär att dess fyra sidor är liksidiga trianglar som alla är lika stora.

Figur 1 i geomag.



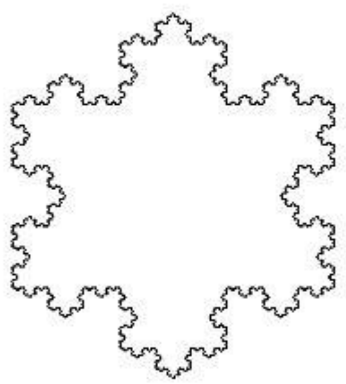
Figur 2 i geomag.



Figur 3 i geomag

Fraktaler har vi också tittat på och det är geometriska mönster som har samma struktur oavsett skala. Det vill säga att mönstret upprepar sig själv oavsett hur mycket man zoomar in. De kan vara både två- och tredimensionella och kan hittas i naturen. Ett exempel på en fraktal vi kan hitta i naturen är växten broccolo. Det finns även fraktaler som är gjorda av oss människor; Von Kochs snöflinga är ett exempel och den har en begränsad area som en vanlig kvadrat men ändå har den oändlig omkrets.

Bild på växten broccolo som är en fraktal.



Von Kochs snöflinga har en oändlig omkrets.

Tolkning

Vi tolkade uppgiften som att vi skulle hitta en formel för antalet pinnar i figur n och en formel för antalet kulor i figur n. Vi har precis jobbat med algebra vilket gjorde att vi direkt förstod att när det kommer till en mönster uppgift är det bra att direkt lägga fokus på att hitta en passande formel.

Arbete och resurser

Vi som klass har under en lektion i veckan suttit i smågrupper och arbetat med att lösa uppgiften tetraeder. Vi satt i smågrupper eftersom att vi ville se till att alla fick chansen att arbeta med uppgiften på ett sätt som de själva kände sig säkra med och så att vi skulle få lösningar ur olika vinklar och tankesätt. Vi gjorde så för att vi var rädda att klassen skulle hamna i ett mönster där alla förlitade sig på en eller några få personer.

Första lektionen satt vi i smågrupper och de flesta av oss försökte bygga upp modeller av tetraedern i flörtkulor och träpinnar för att skapa en förståelse av uppgiften. Detta var väldigt svårt och tidskrävande och därför var det vissa som försökte rita upp 2D-modeller av figurerna vilket dock inte heller fungerade särskilt bra. Vi kom därför fram till att vi behövde hitta en annan lösning vilket resulterade i att vi använde geomag vilket gick både lättare och snabbare. Under den följande lektionen använde vi dessa för att bygga upp figurerna och kom fram till en lösning mycket snabbare. Anledningen till att vi byggde upp modellerna var att vi ville få en bättre förståelse och en helhetsbild kring hur figurerna var uppbyggda. Vi tänkte att en bättre förståelse skulle kunna hjälpa oss komma fram till en lösning vilket sedan visade sig vara sant.

När vi byggde upp modellerna blev det enklare att se samband och mönster. Det gjorde det också lättare att skriva tabeller med antalet pinnar och kulor i de första figurerna. Vissa i klassen tyckte att det var enklare att analysera tabellerna och försökte därför ta reda på formler med hjälp av tabellerna medan andra fortsatte analysera modellerna. Det var även en grupp som fokuserade på att kontrollera andras lösningar. Detta skulle visa sig vara en bra variation eftersom att det visade sig vara enklare att komma fram till olika lösningar beroende på om man arbetade mer med tabeller eller modeller av figuren.

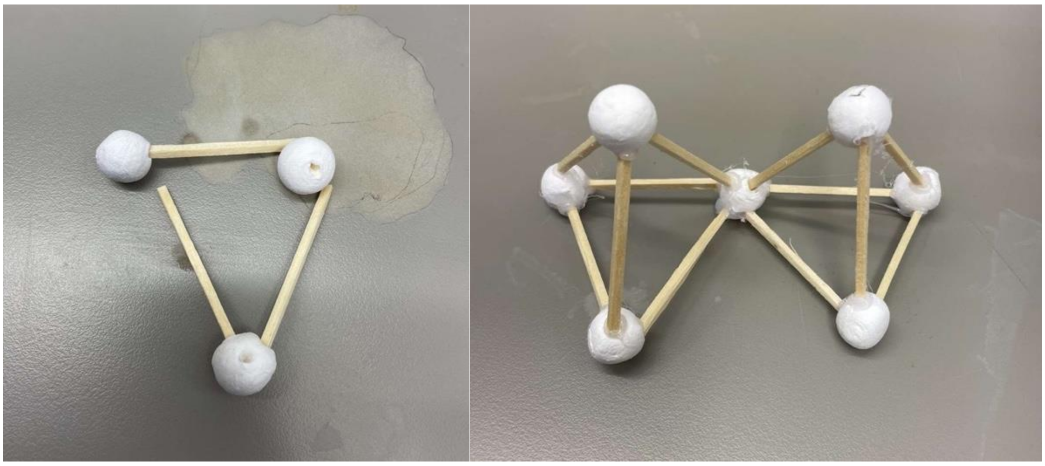
Trots att vi arbetade i mindre grupper behövde vi dela på geomaget eftersom att vi inte hade tillräckligt till alla grupper. Det ledde till att grupperna blandades och uträkningarna spreds snabbt. Trots att klassen arbetade tillsammans hade alla inte fått chansen att förstå exakt hur lösningarna funkade. Därför skapades nya grupper där alla förklarade vad deras förra grupp kommit fram till, hur man kommit fram till det och hur det funkar i praktiken. Det ledde till att vi alla fick en större bredd av lösningar.

Lektionen innan grupperna blandades hade vi kommit fram till en generell formel för antalet kulor och en för antalet pinnar. Vi kände att det var målet med uppgiften och satte oss därför i helklass och summerade allt vi kommit fram till. När olika formler och lösningar visats diskuterade vi för- och nackdelar med de olika lösningarna och kom fram till att de generella formlerna var bäst.

Problem

Under arbetes gång stötte vi på ett par problem. Till en början var det ett problem att vi ville kunna bygga modeller av figurerna men vi hade endast flörtkulorna och träpinnar att använda. Vi försökte trycka hål i flörtkulorna för att fästa pinnarna men det gjorde att modellerna gick sönder och var svåra att bygga som de var byggda enligt uppgiften. Vi började med att försöka limma fast träpinnarna istället och det fungerade bättre men det var ingen effektiv metod. Till andra lektionen hade vi lärt oss och vi tog därför med egna geomag till skolan som vi kunde använda för att enkelt bygga bra modeller. Problemet var alltså ganska enkelt att lösa men det gjorde att vi inte kunde arbeta särskilt effektivt första lektionen med arbetet.

När det kommer till matematiken hade vi lite problem med att komma på en generell formel för antalet kulor i en figur. Lösningen för pinnarna kom vi på direkt men på grund av att det var kulor som delades mellan de mindre tetraedrarna i tetraedern kunde vi inte använda samma metod för att lösa uppgiften som vi tidigare hade gjort. Det blev ett problem då vi inte riktigt visste hur vi skulle angripa uppgiften längre. Vi var dock duktiga som direkt när vi stötte på problemet började samarbeta mellan grupperna och diskutera för att komma på rätt spår igen. Med diskussionen togs det upp många nya, viktiga perspektiv som i sin tur tände idéer. Det var det som gjorde att vi kunde röra oss framåt i arbetet och till slut komma fram till en lösning trots motgångarna.



Bilder på våra modeller första lektionen.

Lösning

Vi har kommit fram till fem lösningar som vi tycker är viktiga och vill berätta om. Vi har kommit på ett sätt att beräkna antalet pinnar genom att endast veta antalet pinnar i föregående figur och likadant för antalet kulor. Vi kom också fram till att man kunde ta reda på antalet kulor i en figur genom att veta antalet pinnar och kulor i föregående. Den viktigaste lösningen och det vi satte som mål var att komma på en generell formel för både antalet pinnar och kulor. Alltså att kunna ta reda på hur många antingen pinnar eller kulor som finns i den n:te figuren.

Notera att en "box" i texten är samma sak som en figur 1 i uppgiften, alltså en tetraeder som består av sex pinnar och fyra kulor.

Det finns ett väldigt enkelt sätt att beräkna antalet pinnar i en figur om man vet antalet pinnar i föregående figur. Man multiplicerar helt enkelt antalet pinnar i föregående figur med fyra och får då antalet pinnar i den önskade figuren. Detta kom vi fram till väldigt snabbt och enkelt då vi direkt förstod att pinnarna inte delades mellan boxar i figuren. Det innebär att antalet pinnar bara behöver multipliceras med fyra eftersom att den nya figuren består av fyra stycken av den föregående figuren.

På samma sätt kan man tänka om kulorna. Man tar antalet kulor i föregående figur multiplicerat med fyra men eftersom att ett antal kulor delas mellan boxar fungerar det inte än. Det är sex kulor som räknas två gånger när man multiplicerar föregående figur med fyra. Därför kan man helt enkelt ta antalet kulor i föregående figur multiplicerat med fyra och sedan subtraherat med sex för att få fram antalet kulor i den önskade figuren. Detta tankesättet användes även när vi kom på formeln för antalet kulor.

Vi är tacksamma att vi i klassen tänker på olika sätt och ur olika perspektiv eftersom att denna lösningen inte hade hittats om inte det varit för några få som analyserade tabeller. När man skriver en tabell av antalet pinnar och kulor i figurerna kan man ganska snabbt se att man helt enkelt kan ta antalet pinnar adderat med antalet kulor i föregående figur för att få fram antalet kulor i den önskade figuren. När vi hade problem att komma på en formel för antalet kulor hittade vi denna egenskapen hos tetraedern och det gjorde att vi kände oss mer säkra trots att vi inte kommit fram till svaret vi önskade än.

En generell formel för antalet pinnar löste vi enkelt utan att rita och bygga. Det gjorde vi eftersom att vi kom på att det var en simpel geometrisk talföljd där antalet boxar multiplicerades med fyra för varje ny figur. Vi förstod att det fanns sex pinnar i varje box och att man därför kunde ta antalet boxar multiplicerat med sex för att få fram antalet pinnar i figuren. Antalet boxar i figuren börjar på ett och multipliceras med fyra för varje ny figur. Då förstod vi att man kan beskriva antalet boxar som 4^{n-1} eftersom att det innebär att figur 1 har en box och att det sedan multipliceras med fyra för varje ny figur.

Antalet pinnar kan därför beskrivas som $4^{n-1} \cdot 6$.

Som vi har varit inne på var det svårare att komma på en generell formel för antalet kulor då de delades mellan boxar. Vi lyckades ändå komma fram till en formel som funkar för alla figurer och den såg från början ut såhär:

$$\frac{4 \cdot 4^{n-1} - 4}{2} + 4$$

Vi har sedan förenklat den men för att förstå hur vi tänkte är denna formeln lättast att använda. Det som gjorde att vi kunde komma fram till denna lösningen var att vi förstod att alla kulor delas mellan två boxar förutom de fyra hörn kulorna. Eftersom att varje box har fyra kulor tog vi antalet boxar (4^{n-1}) multiplicerat med antalet kulor i varje box (4) subtraherat med de fyra hörn kulorna för att få fram alla kulor som inte är hörn kulor räknade två gånger. När man dividerar det med två och sedan adderar de fyra hörn kulorna igen får man fram antalet kulor i figur n. Denna formeln fungerar alltså för alla figurer men vi har sedan förenklat den. Den kortaste förenklingen ser ut såhär:

$$4^{n}/2 + 2$$

Den fick vi helt enkelt fram genom att förkorta formeln.

Reflektion och lärande

Arbetsprocessen var väldigt lärorik för klassen då vi aldrig fått arbeta med denna svårighetsgrad på uppgifter innan. Vi har fått träna vår samarbetsförmåga och för de som enkelt förstod uppgiften och lösningarna vi kom fram till fick träna på sin förmåga att lära ut och förklara matematik till andra på ett enkelt sätt. Vi fick utveckla vår förmåga att arbeta med mönster och se samband mellan figurer och har därför också utvecklat vår förståelse för hur man ska angripa denna sortens problem.

Att bolla idéer och ta hjälp av varandra för att lösa uppgifter man inte är bekväm med har vi nästan aldrig fått chansen att träna på vilket vi fick nu. Det har varit utmanande mentalt eftersom att vi fastnade och inte verkade komma någonstans närmare en lösning. Vi hjälpte varandra att fortsätta tänka ur nya perspektiv och det gjorde att vi lyckades komma fram till en lösning vi alla var nöjda med.

Källförteckning

1. NE.se
    1.1. https://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/fraktal
    1.2. https://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/tetraeder
2. Synonymer.se
    2.1. https://www.synonymer.se/sv-syn/fraktal